Etude de la démarche qui mena Kepler à ses trois lois

Travail de maturité réalisé au Lycée Denis-de-Rougemont
sous la direction de Eduardo Principi

Laure Manueddu

1. Introduction

Le nom de Johannes Kepler évoque immédiatement ses trois célèbres lois. Cet astronome allemand les découvre au XVI^{e}, alors que la physique est très différente de celle d'aujourd'hui : en effet, ce n'est qu'après la mort de Kepler que Newton amène la notion de force et expose, entre autres, le principe d'inertie et la proportionnalité des forces et des accélérations. Une question s'impose alors naturellement : Comment Kepler a-t-il réussi à découvrir ces trois lois, qui n'ont pu être démontrées que grâce à des connaissances acquises ultérieurement ? C'est précisément à cette question que nous allons répondre, et ce en étudiant la démarche suivie par Kepler dans les travaux qui l'ont mené aux trois lois. Nous nous intéresserons aux aspects de la vie de l'astronome uniquement dans la mesure ou ils ont influencé sa démarche.

Avant toute chose, il sera nécessaire d'évoquer les principales idées qui ont marqué l'histoire de l'astronomie jusqu'aux travaux de Kepler. Pour ce faire, nous mettrons en évidence trois dogmes d'importance capitale dans l'évolution des conceptions de l'univers, puis nous présenterons les modèles de Ptolémée et de Copernic.

Pour débuter l'étude de la démarche de Kepler, nous nous intéresserons au modèle que Kepler a conçu sur la base des solides de Platon et qu'il expose dans le *Mysterium Cosmographicum* en 1596. Nous définirons ces solides et nous démontrerons qu'il n'en existe que cinq. Nous nous poserons la question suivante : pourquoi Kepler a-t-il pensé à ce modèle et en quoi est-ce représentatif de sa démarche ?

Ensuite, nous parlerons de l'étude de l'orbite de Mars menée par l'astronome dans son traité Astronomia nova. Nous étudierons comment, en calculant cette orbite, Kepler a établi que la trajectoire des planètes autour du Soleil est elliptique et que le Soleil se trouve à l'un des foyers de cette ellipse : c'est la première loi. Puis nous montrerons comment à cette découverte s'est ajoutée la deuxième loi, dite loi « des aires », toujours en étudiant l'orbite de Mars. Nous démontrerons cette loi qui énonce que les planètes balaient des aires égales en temps égaux à l'aide de la définition du moment cinétique.

Finalement, nous étudierons certains aspects du traité sur l'Harmonie du monde, *Harmonice mundi,* que Kepler a publié en 1619. Nous nous attacherons à comprendre comment Kepler parvient à travers cette étude à la troisième loi : il établit en effet une proportionnalité entre le carré de la période de révolution des planètes et le cube du grand axe de leur orbite. Nous démontrerons cette loi dans le cas particulier du cercle à l'aide de la loi de la gravitation universelle de Newton.

1. Où en est l'astronomie avant Kepler ?

Pour mieux appréhender la démarche de Kepler, il faut connaître les principales idées qui ont marqué l'évolution des conceptions de l'univers. Nous n'avons évidemment pas la prétention de résumer toute l'histoire de l'astronomie, c'est pourquoi nous nous restreindrons à trois éléments qui nous intéressent tout particulièrement ici.

Comme nous l'avons dit dans notre introduction, nous mettrons en évidence trois dogmes dont l'importance est capitale dans l'histoire de l'astronomie. Puis nous présenterons brièvement le modèle de Ptolémée et enfin celui de Copernic.

Au quatrième siècle avant notre ère, Platon affirme que tout mouvement de planète s'effectue à une vitesse uniforme et en cercles : c'est le premier dogme qui paralysera l'avancée de l'astronomie. En effet, cette idée aura comme conséquence que les astronomes devront désormais concevoir des modèles qui expliquent le mouvement des planètes en usant de mouvements circulaires uniformes tout en corroborant les observations. Cette erreur perdura jusqu'au XVI^{e}.

Suite à cela, Aristote, influencé par les idées de Platon, propose son modèle de l'univers dans lequel il présente comme irréfutable une idée qui avait précédemment été défendue par Eudoxe, un disciple de Platon: le géocentrisme. Il place donc la Terre, sphérique, au centre de l'univers et la prive de mouvement. À l'exception notoire d'un modèle héliocentrique proposé au troisième siècle avant Jésus-Christ par un philosophe ionien, Aristarque de Samos, le modèle géocentrique ne va plus quitter les astronomes jusqu'à sa réfutation au XVI^{e} par Copernic, comme nous le verrons sous peu.

De plus, Aristote énonce la séparation du monde en deux sphères principales. La première, imparfaite, est la sphère infralunaire et contient comme son nom l'indique ce qui se trouve entre le centre de la Terre et la sphère formée par l'orbite de la Lune. Dans cette région du monde règne le changement et les mouvements irréguliers. La seconde est délimitée par ce que l'on appelait alors les étoiles fixes : tout y est parfait, inaltérable et les corps s'y meuvent donc en cercles et à vitesses uniformes comme l'avait énoncé Platon.

Le modèle d'Aristote consiste en une version améliorée du modèle d'Eudoxe, lequel assignait à chaque planète plusieurs sphères, vingt-sept au total, dont les rotations combinées reproduisaient très approximativement le mouvement des planètes. Aristote porte le nombre de sphères à cinquante-cinq pour que son modèle corresponde mieux aux observations.

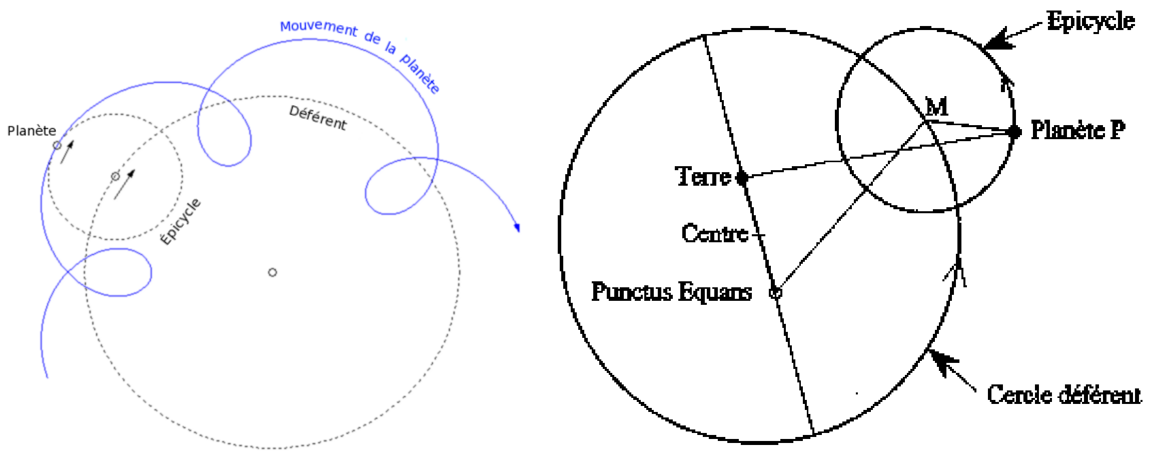

fig 1. Cercle déférent et épicycle (tiré de: http://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler et Fischer, 2000)

Au II^{e} siècle, un astronome grec d'Alexandrie du nom de Ptolémée écrit un traité d'astronomie qui est destiné à être reconnu et utilisé pendant mille trois cents ans : l'Almageste. Ptolémée y présente son modèle de l'univers, en accord avec les dogmes évoqués plus haut. Il place effectivement la Terre au centre de l'univers et n'use que de cercles pour expliquer le mouvement des planètes.

Selon Ptolémée, une planète se meut à vitesse constante sur un cercle nommé *épicycle* dont le centre tourne autour d'un plus grand cercle appelé *déférent*, comme nous le montrent les deux dessins de la figure 1. Cela permet de rendre compte des mouvements de rétrogradations constatés et des variations de la distance planète-Terre de manière approximative. En effet, d'autres irrégularités dues à leurs orbites elliptiques sont observées dans le mouvement des planètes. Pour pallier à cela, Ptolémée introduit la notion d'*excentrique*. Le centre du grand cercle n'est désormais plus situé sur la Terre mais se meut sur un petit cercle a proximité de celle-ci. De plus, il invente le *point équant* (punctus equans sur le dessin de droite), duquel on observerait un mouvement circulaire uniforme. La distance de ce point au centre de l'excentrique est égale à la distance Terre-centre de l'excentrique.

Ainsi, à force d'épicycles, d'excentriques et d'équants, le système de Ptolémée compte quarante cercles et réalise des prévisions dont la relative conformité aux observations lui vaut la reconnaissance jusqu'au XVI^{e}.

En l'an 1515, Copernic, un chanoine allemand, publie un court traité intitulé *Commentariolus.* Ce livre révolutionne l'astronomie en contestant le dogme du géocentrisme : Copernic y présente en effet les grandes lignes d'un modèle héliocentriste.

Il est important de clarifier la raison qui mène Copernic à tenter d'expliquer l'univers avec un autre modèle que celui de Ptolémée, lequel est toujours largement utilisé et reconnu à cette époque. Si Copernic est amené dans la conception de son modèle à rejeter le géocentrisme, il ne renonce jamais à l'idée du mouvement circulaire à vitesse uniforme. Or, selon lui, le modèle de Ptolémée ne répond pas à ce critère à cause de l'utilisation des points équants. Dans le Commentariolus, Copernic affirme remédier à cela en plaçant le Soleil au centre des révolutions des planètes et en réduisant le nombre de cercles utilisés comme épicycles et déférents de quarante à trente-quatre. Cependant, cela ne s'accorde pas avec les observations et Copernic doit donc adapter les axiomes énoncés dans ce traité pour sa seconde publication, le Livre des Révolutions des orbes célestes, dans laquelle il détaille son modèle. Ainsi, le centre des orbites des planètes ne coïncide pas avec le Soleil mais en est éloigné d'environ trois fois le diamètre du Soleil pour être en accord avec les faits observés. Cela porte bien évidemment un coup à la crédibilité de la théorie de Copernic ; il semble en effet difficile d'expliquer pourquoi les planètes tournent autour d'un point immatériel. Toujours dans un souci de conformité aux mesures effectuées, d'autres parties du modèle sont « arrangées » de la même manière.

Finalement, le modèle de Copernic compte quarante-huit cercles et ne représente donc pas de ce point de vue-là une simplification du modèle de Ptolémée comme il l'aurait souhaité. Cependant, le simple fait de réfuter le dogme du géocentrisme fait de l'œuvre de Copernic une étape fondamentale de l'histoire de l'astronomie.

3. Mysterium Cosmographicum

En 1595, Kepler enseigne les mathématiques à l'université de Graz. Cet astronome de trente-quatre ans se présente comme un copernicien convaincu et défend la théorie héliocentriste du chanoine allemand alors que sa diffusion reste confidentielle. Kepler a l'ambition de comprendre l'Univers, c'est-à-dire le mouvement des planètes autour du Soleil. Il expose la démarche qui le mène, entre autres, à un modèle basé sur les solides de Platon dans un livre édité en 1596 : le *Mysterium Cosmographicum*.

Dans l'introduction, Kepler explique qu'il veut répondre à la question suivante : pourquoi existe-t-il six planètes autour du Soleil et pas cinq ou cent ? Le nombre six peut nous étonner ; il est dû au fait qu'Uranus, Neptune et Pluton sont hors de portée des instruments d'observations de l'époque. Il sera donc question ici de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne. L'astronome désire également mettre en lumière une explication aux distances séparant ces planètes du Soleil. Même si, de nos jours, il nous paraît peu scientifique de se poser de telles questions, cela est très représentatif de la démarche de Kepler. Il s'attache en effet à mettre en évidence la perfection de l'univers qu'il considère comme l'œuvre de Dieu et cherche donc des raisons à tout ce qu'il observe.

En vue de trouver une réponse à cette question qui le taraude, Kepler essaie tout d'abord d'établir des relations numériques entre les rayons des différentes orbites des planètes, ou encore entre les différences de ces rayons. Or, tous ces essais restent vains. En conséquence, Kepler décide de se tourner vers la géométrie pour expliquer le nombre des planètes et les distances les séparant du Soleil.

Les premiers essais géométriques consistent en polygones réguliers inscrits et circonscrits à des cercles. Kepler espère ainsi découvrir une analogie entre les rayons des orbites des planètes autour du Soleil et les rayons de ces cercles. Cependant, il existe une infinité de polygones réguliers et cela n'explique donc pas que les planètes soient au nombre de six. L'astronome se rend alors compte qu'il tente d'utiliser des notions de géométrie du plan pour expliquer des phénomènes ayant lieu dans l'espace. Avec le passage à la troisième dimension, l'idée qui ne le quittera plus lui apparaît.

Il faut savoir que si le nombre de polygone réguliers est infini, il n'existe que cinq polyèdres réguliers. La définition d'un polyèdre régulier est la suivante : toutes ses faces sont des polygones réguliers convexes congrus et le même nombre de faces se rencontre à chacun de ses sommets. Platon attribue une grande importance à ces solides connus depuis l'Antiquité dans sa conception de l'univers en associant quatre de ces polyèdres aux quatre « éléments » : le Feu, la Terre, l'Air et l'Eau. Il met le cinquième en relation avec l'Univers. Depuis lors, on nomme ces polyèdres réguliers les solides de Platon. Euclide est le premier à prouver qu'il n'existe que cinq de ces solides.

Démonstration géométrique donnée par Euclide dans les *Eléments*

La démonstration de Euclide tient en quatre points :

1. Chaque sommet du solide doit être constitué d'au moins trois sommet de polygones.

2. A chaque sommet du solide, la somme des trois angles (ou plus) réunis doit être inférieure à 360°. En effet, si cette somme vaut 360°, le sommet n'en est pas un puisque la figure est plane.

3. Les sommets de toutes les faces d'un solide de Platon sont identiques, donc l'angle des sommets du polygone constituants les faces du solide doit être inférieur à 360°/3 = 120°.

4. Seuls les polygones comptants trois, quatre ou cinq côtés ont des angles de moins de 120°. Autrement dit, les faces possibles sont le triangle (équilatéral puisque ce doit être un polygone régulier), le carré ou le pentagone. Considérons-les successivement.

   a) Faces triangulaires : l'angle de chaque sommet d'un triangle équilatéral étant de 60°, seuls des sommets de trois, quatre ou cinq triangles sont possibles. Avec des sommets comportant trois triangles, on obtient un tétraèdre. Avec quatre triangles, c'est un octaèdre. Si cinq triangles forment un sommet, le polyèdre est un icosaèdre.

   b) Faces carrées : comme chaque sommet d'un carré a un angle de 90°, il n'existe qu'un seul solide à faces carrées et ses sommets sont constitués de trois faces : c'est le cube.

   c) Faces pentagonales : l'angle des sommets d'un pentagone étant de 108°, on ne peut construire qu'un seul polyèdre dont les sommets sont constitués de trois faces : il s'agit du dodécaèdre.

Une propriété de ces polyèdres réguliers (figure 2) est qu'il est possible de leur inscrire une sphère qui touche le centre de chacune des faces et de leur circonscrire une sphère qui touche tous les sommets.

L'illumination de Kepler est la suivante : comme il existe six planètes et donc cinq intervalles entre ces planètes, l'univers doit être basé sur les cinq solides platoniciens!

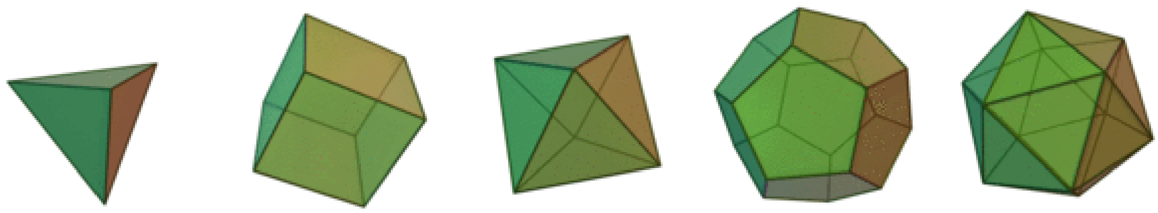

fig 2. Les cinq solides de Platon (tiré de Lombardi, 2001)

Voici ce que Kepler suppose : les orbites des planètes se trouvent sur des sphères centrées sur le Soleil. On remarque qu'il abandonne l'idée de Copernic d'un Soleil « décentré » : pour Kepler, au centre physique des orbites des planètes ne peut siéger que le Soleil. A chaque sphère est tangent un des solides platoniciens, lequel est tangent à la sphère suivante. L'astronome se met alors en quête de la succession correspondant à la réalité. La figure 3 présente celle qu'il propose.

Dans la préface au lecteur, il décrit ainsi sa démarche : « C'est étonnant ! Je ne voyais pas encore clairement dans quel ordre il fallait ranger les solides parfaits, et pourtant je réussis… à les ranger si heureusement que je n'eus rien à y changer. Je ne regrettais plus alors le temps perdu ; je n'étais plus las de mon travail, je ne reculais devant aucun calcul, si difficile qu'il fût. Jour et nuit je fis mes calculs pour voir si la proposition que je venais de formuler s'accordait avec les orbites de Copernic ou bien si ma joie serait emportée par le vent… En quelques jours tout fut en place. Je vis les solides symétriques s'insérer l'un après l'autre avec tant de précision entre les orbites appropriées… que si un paysan demandait à quel crochets les cieux sont fixées pour ne pas tomber, il serait facile de lui répondre. Adieu. »[1] On remarque ici son enthousiasme pour ce modèle fraîchement créé. La beauté de ce qu'il vient de découvrir lui fait présumer de sa validité avant même de l'avoir véritablement confronté aux données à sa disposition. Plus loin dans la lecture, il explique même pourquoi tels solides se trouvent entre telles planètes, et ce avec des arguments qui nous paraissent aujourd'hui fantaisistes. Même si, comme nous le verrons sous peu, ce modèle ne correspond pas aux observations de façon précise, Kepler conservera une fascination pour le modèle des solides de Platon jusqu'à la fin de sa vie.

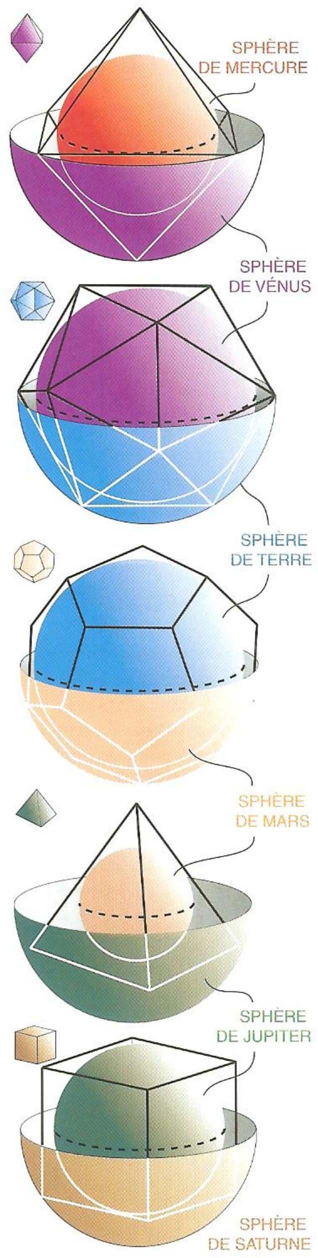

fig3. Succession planète-solide du modèle des solides platoniciens (tiré de Lombardi, 2001)

Kepler affirme qu'il recherche l'exactitude ; il ne désire pas d'approximation. Ainsi, il s'attelle à la vérification du modèle des solides de Platon en comparant les mesures prévues par ce dernier et celles qui sont observées. Il en résulte que la précision attendue par l'astronome n'est qu'approximative. Comme nous le savons aujourd'hui, cela est dû au fait que les planètes décrivent des ellipses autour du Soleil, lequel se trouve à un de leurs foyers. Kepler n'ayant bien sûr pas encore découvert cette loi, son modèle prévoit des orbites circulaires au centre desquelles se trouve le Soleil. Cependant, il se rend compte de l'impossibilité de l'existence d'orbites circulaires dans son modèle. Il attribue donc aux planètes des orbites ovales, abattant un des dogmes qui, comme nous l'avons vu dans notre état des lieux de l'astronomie avant Kepler, avaient paralysé cette science pendant si longtemps.

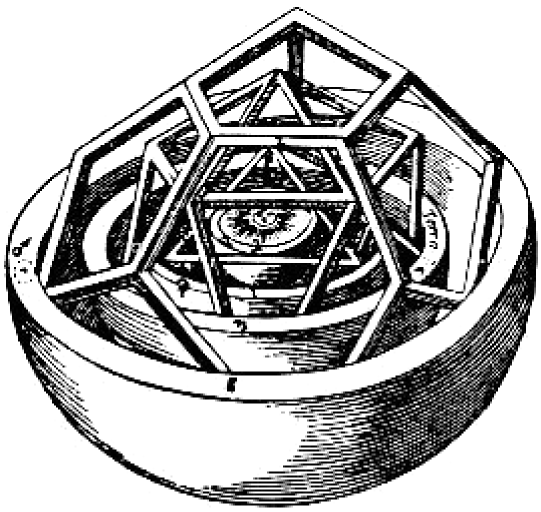

fig 4. Représentation du modèle des solides platoniciens montrant les épaisseurs contenant les orbite des planètes (tiré de: http://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler)

On remarque ici que même si l'astronome a connaissance de l'ellipse en tant que figure géométrique, il ne mentionne jamais la possibilité d'orbites elliptiques et ne parle que d'ovales ou de courbes. Selon Arthur Koestler, cette curieuse omission est le fruit de l'irrationalité du génie de Kepler. Il nous est également permis de penser que l'abandon du mouvement circulaire ne va pas de soi pour l'astronome, et qu'il conserve l'espoir de trouver une solution dotée qui décrirait les orbites à l'aide de cercles.

Pour pouvoir inclure ces orbites « ovales » dans son modèle, il se voit forcé de transformer les sphères, dont l'épaisseur est par définition infinitésimale, en « coquilles » sphériques dont l'épaisseur peut contenir l'orbite de la planète (figure 4). La distance minimale entre la planète et le Soleil se trouve sur la paroi interne de la coquille, et la distance maximale sur la paroi externe. En procédant à ces corrections, le modèle est relativement conforme aux observations en ce qui concerne les orbites de Vénus, la Terre et Mars, mais Kepler ne parvient pas à un résultat satisfaisant pour Jupiter, Mercure et Saturne.

L'astronome arrive au point où il doit choisir que blâmer : son modèle ou les données de Copernic? Il opte pour la seconde possibilité. On prend toute la mesure de l'attrait qu'exerce le modèle des solides de Platon sur Kepler en l'entendant accuser de manque d'exactitude le chanoine allemand dont il a toujours défendu les idées. Plus tard, Kepler s'amusera de cet instant d'égarement en déclarant : « Après tout, on ne s'offense pas d'un bambin de trois ans qui décide de lutter contre un géant. » (tiré de Koestler, 1973).

Kepler prend finalement la décision de reporter l'invalidation de son modèle jusqu'à l'obtention de données plus précises : en vue de les obtenir, dans son esprit se profile déjà l'idée d'aller travailler chez un certain Tycho Brahe. Ici s'achève donc sa réflexion sur le nombre des planètes et les distances les séparant du Soleil, réflexion qui l'a mené au modèle des solides de Platon.

L'astronome décide ensuite de se préoccuper des vitesses et des périodes de révolution des planètes. De façon similaire à ce que nous avons vu jusqu'ici, il expose sa démarche dans la suite du Mysterium Cosmographicum. Le fait de s'interroger au sujet des périodes de révolution des planètes autour du Soleil naît d'un constat effectué en comparant rayons et périodes de révolution des planètes : quelques calculs suffisent pour remarquer que ces périodes ne sont pas proportionnelles aux longueurs des trajets. Ceci constitue ainsi la première énigme qu'il va tenter de résoudre.

De plus, Kepler est amené à un autre constat troublant : les planètes ne se déplacent pas à vitesses constantes le long de leurs orbites. En effet, les observations montrent que les planètes ont tendance à accélérer lorsqu'elles sont plus proches du Soleil et à décélérer quand elles en sont plus éloignées. Une digression s'impose ici pour se souvenir du fameux dogme du mouvement circulaire uniforme énoncé par Platon : le voici enfin contesté, et ce après quatorze siècles de règne sur l'astronomie! Kepler désire bien entendu expliquer les variations de ces vitesses.

Ces questions vont amener Kepler à s'intéresser de plus près aux causes du mouvement des planètes. Ceci est sans précédent dans l'histoire de l'astronomie : en effet, pour la première fois, on n'essaie pas uniquement de décrire le mouvement des planètes le mieux possible mais on désire aussi l'expliquer.

L'astronome postule alors l'existence d'une ou plusieurs « âmes motrices », lesquelles serait responsables du mouvement des planètes. Commentaire ? Il envisage deux possibilités : « soit les âmes qui meuvent les planètes sont d'autant moins actives que la planète est éloignée du Soleil, soit il n'existe qu'une seule âme motrice au centre de toutes les orbites, c'est-à-dire le Soleil, qui pousse la planète d'autant plus vigoureusement que la planète est proche, mais dont la force est quasi épuisée lorsqu'elle agit sur de grande distances. »[1] Par la suite, Kepler penche en faveur du Soleil comme unique âme motrice.

Kepler nomme ensuite « vertu » cette capacité à induire le mouvement des planètes dont dispose le Soleil. Il suppose une analogie entre cette vertu et l'intensité lumineuse, dont il sait qu'elle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance. On peut avoir l'impression ici que l'on est plus proche de la théorie de la gravitation universelle qu'on ne l'a jamais été : de là à affirmer que le Soleil exerce une force diminuant avec le carré de la distance, il ne semble n'y avoir qu'un pas! Et pourtant… Il commet l'erreur de penser que l'action du Soleil ne se répartit pas dans l'espace à l'instar de la lumière mais uniquement dans le plan de l'orbite. Sa conclusion est qu'elle diminue avec la distance entre la planète et le Soleil et non avec cette distance élevée au carré.

Ainsi, Kepler ne formule pas de loi correcte dans le Mysterium Cosmographicum. Il serait cependant erroné de conclure que l'astronome n'a pas fait un grand pas dans la direction de ce que l'on nommera plus tard ses lois : en effet, il est parvenu à deux constats dont l'importance se révélera fondamentale. Premièrement, Kepler entrevoit, avec beaucoup de réticences il est vrai, la possibilité d'orbites non circulaires. On devine aisément que ceci annonce la première loi qui présente les orbites comme étant elliptiques. Deuxièmement, l'astronome sait que la vitesse des planètes est plus grande lorsqu'elles sont plus proches du Soleil, dont l'action est responsable de leur mouvement et selon lui s'affaiblit avec la distance. Cela sera à la base de la réflexion qui le mènera à la loi des aires.

Le *Mysterium Cosmographicum* représente donc une étape fondamentale de l'œuvre de Kepler ; il préfigure la suite de ses recherches qu'il exposera dans un autre traité, Astronomia Nova.

4. Astronomia Nova

Nous avons laissé un Kepler qui, après s'être débattu pour prouver son modèle des solides platoniciens, a décidé d'en différer la condamnation ou la validation jusqu'à l'obtention de données plus précises. Kepler a déjà une idée bien précise de la façon dont il va les obtenir.

Il nous faut maintenant présenter un autre personnage marquant de l'astronomie, tant par ses accomplissements scientifiques que par son excentricité : Tycho Brahe. La grande qualité de cet astronome réside dans le fait de comprendre que l'astronomie de l'époque ne peut pas se passer de mesures précises. Pendant une vingtaine d'années, Brahe a amassé une quantité formidable de données dans son observatoire de l'île de Hven qui lui avait été donnée par le Roi du Danemark. La précision de ses observations est due à la qualité de ses instruments, dont certains sont de sa propre conception. Ainsi, l'imprécision de ses mesures relève de la minute d'arc, c'est-à-dire du soixantième de degré. Même si les détails des travaux de Tycho Brahe ne sont pas notre propos ici, une de ses découvertes se doit d'être évoquée. En 1572, une supernova explose dans les environs de la constellation de Cassiopée et l'astronome prouve qu'elle appartient à la sphère des étoiles fixes, autrement dit que c'est une étoile, en utilisant ses instruments. On mesure l'importance de cette affirmation et le scandale qu'elle cause si l'on se rappelle du dogme de la sphère sublunaire et de la sphère supralunaire énoncé par Aristote dix-huit siècles auparavant. Brahe ose en effet affirmer que quelque choses dans la sphère des étoiles fixes a changé, alors que tout ce qui s'y trouve est supposé immuable et parfait.

Lorsque Kepler entre en contact avec Tycho Brahe en l'an 1600 au sujet d'une éventuelle collaboration, ce dernier a quitté Hven à la suite d'une mésentente avec le Roi ; il occupe à présent un poste de mathématicien à la cour de Prague et travaille dans son nouvel observatoire personnel entouré de plusieurs assistants. Kepler espère pouvoir profiter des mesures de Brahe ; on se souvient de son désir de vérification de son modèle des solides de Platon à l'aide de nouvelles mesures. Longtemps avant que la collaboration entre les deux hommes ne devienne effective, Kepler avait déjà en tête de tirer avantage des richesses et de l'inventivité de l'astronome danois et avait déclaré un an auparavant : « voilà ce que je pense de Tycho : il nage dans les richesses, mais il ne sait pas les exploiter de manière correcte, comme c'est le cas de la plupart des gens riches. Il faudrait donc essayer de lui soutirer ses richesses (et moi-même, modestement, j'ai joué mon rôle) en mendiant presque, pour que ses observations soient divulguées de manière sincère et complète. »[2]

Brahe a lu le Mysterium Cosmographicum et pressent avec justesse l'intelligence de Kepler : il l'engage donc comme assistant et lui attribue la tâche d'étudier l'orbite de Mars. Malgré des débuts quelque peu houleux dû entre autres au fait que l'astronome danois n'est que peu disposé à une utilisation de ses mesures en vue de vérifier d'autres hypothèses que les siennes, la relation entre les deux hommes s'améliore peu à peu. Malheureusement, cette collaboration s'interrompt moins de deux ans plus tard lorsque Tycho Brahe meurt à la suite, semble-t-il, d'un dîner trop arrosé. Kepler lui succède alors au poste de mathématicien impérial du Saint-Empire romain germanique ainsi qu'à la direction de son observatoire.

Après cette digression biographique, revenons à la démarche de notre astronome. La mort de Tycho Brahe n'a fait que renforcer la détermination de Kepler à venir à bout de l'orbite de Mars, laquelle représente pour l'astronomie un mystère qui semble jusqu'ici insoluble. Observée depuis la Terre, cette planète offre un spectacle pour le moins déroutant : elle semble parfois reculer. De plus, ce mouvement rétrograde n'est pas régulier. Tout cela est dû, comme nous le savons aujourd'hui, au fait que l'orbite de Mars est particulièrement elliptique. Dans la dédicace de l'Astronomia Nova, traité qui, à l'instar du Mysterium Cosmographicum, décrit le cheminement suivi par l'astronome pour parvenir à ses découvertes, Kepler déclare : « Pour découvrir les secrets de l'astronomie, il est absolument nécessaire d'utiliser Mars. Sinon, ces secrets ne seront jamais dévoilés. » (tiré de Koestler, 1973).

L'introduction de l'Astronomia Nova se divise en trois parties qui exposent chacune une découverte ou une opinion de Kepler.

Tout d'abord, Kepler réaffirme sa conviction que le Soleil doit se situer au centre du mouvement des planètes puisqu'il en est la cause. Comme nous l'avons vu, le système de Copernic faisait tourner les planètes autour d'un point imaginaire, distant du Soleil d'environ trois fois le diamètre de ce dernier. Même en utilisant cet artifice que Kepler refuse, les observations ne correspondent pas à la théorie dans le cas de Mars. Bien que Kepler semble péremptoire sur ce point de l'introduction, nous verrons sous peu qu'il ne le respectera pas.

De plus, Kepler montre, à l'aide des observations de Tycho Brahe, que le plan de l'orbite de Mars n'oscille pas comme Copernic l'avait pensé mais qu'il forme un angle de 1°50' avec le plan de l'orbite terrienne. Il est intéressant d'observer que Kepler use ici avec succès de la méthode de travail qu'il nomme *a priori*, qui consiste à formuler une hypothèse et la vérifier ensuite grâce aux mesures à sa disposition. Cette façon de travailler, que Tycho Brahe lui a souvent reprochée, diffère fortement de l'habitude qu'a eu l'astronomie pendant des siècles de se baser sur les observations effectuées, pour essayer ensuite d'aboutir à des modèles leurs correspondant.

Enfin, nous rappelons également que Kepler a entrevu la possibilité d'orbites non circulaires et de vitesses non uniformes au cours du Mysterium Cosmographicum. Dans l'introduction d'Astronomia Nova, il déclare donc que l'axiome de la vitesse uniforme doit être abandonné puisque, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il pense que le Soleil régit le mouvement des planètes et qu'elle vont ainsi plus ou moins vite selon qu'elles se trouvent à plus ou moins grande distance de ce dernier. Cependant, il semble dans cette même introduction faire marche arrière sur le point des orbites non circulaires puisqu'il affirme être déterminé à vouloir trouver une solution au mouvement des planètes qui utilise des cercles.

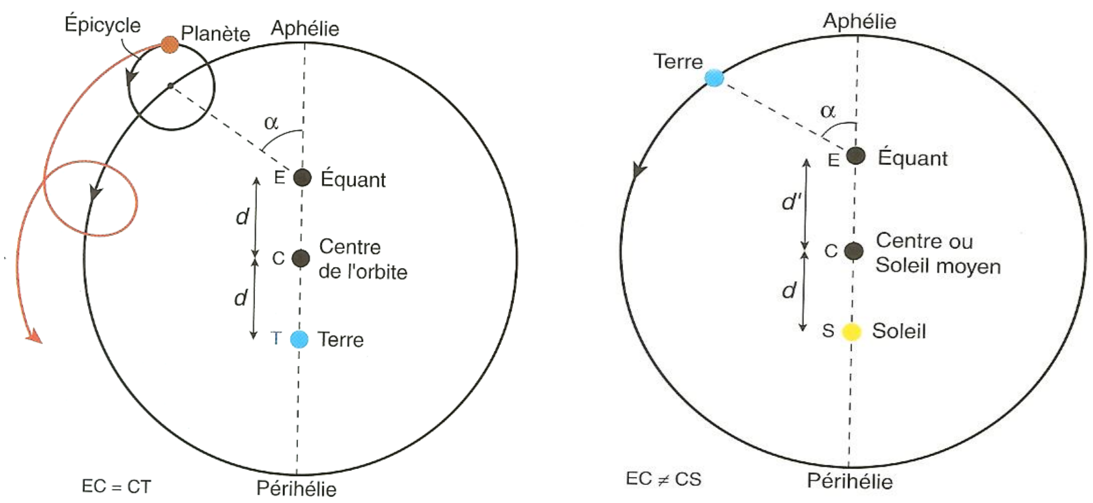

fig 5. Equant de Ptolémée et equant de Kepler (tiré de Lombardi, 2001)

Cette volonté de conserver un modèle circulaire va pousser Kepler à revenir à l'idée d'un point équant, concept que nous avons précédemment expliqué et qu'il va légèrement modifier. Le point équant est un point duquel on observerait un mouvement uniforme de la planète, c'est-à-dire que cette dernière parcourrait des angles égaux en temps égaux. Selon Ptolémée, il se situe à l'exact opposé de la Terre par rapport au centre de l'orbite de la planète. Comme nous le montre la figure 5, Kepler modifie cela et suppose que la distance entre le point équant et le centre de l'orbite n'est pas égale à la distance entre le centre de l'orbite et le Soleil.

Notre astronome calcule alors la position de cet équant pour l'orbite de Mars. Les prévisions effectuées avec le résultat obtenu aboutissent à des erreurs de deux à dix minutes d'arc selon les données utilisées. Cette imprécision trop importante aux yeux de Kepler l'amène à abandonner cette hypothèse et à tirer la conclusion que voici : « dans le plan de l'orbite, il n'existe aucun point fixe par rapport auquel les planètes se déplacent avec une vitesse angulaire constante. » (tiré de Koestler, 1973) L'astronome ajoute : « L'édifice que nous avons élevé sur les fondations des observations de Tycho, nous l'avons renversé… Ce fut notre punition pour avoir suivi les axiomes plausibles, mais faux en réalité, des grands hommes du passé. » (tiré de Lombardi, 2001).

Kepler interrompt un temps la rédaction d'Astronomia Nova pour mener des recherches dans le domaine de l'optique. Il s'est en effet rendu compte de l'importance de comprendre certains phénomènes optiques pour être capable d'interpréter des mesures de manière correcte. Nous n'étudierons pas ces travaux, tant parce que ce n'est pas notre propos ici que parce qu'ils mériteraient une étude approfondie à eux seuls. Cependant, nous devons mettre en évidence une des découvertes de Kepler dans le domaine des lentilles coniques qui est en relation avec la suite de son chemin vers la première loi. L'astronome s'aperçoit en effet de l'existence de deux points, qu'il nomme foyers, dans les lentilles coniques ou convergent tous les rayons émis par l'autre point. Ainsi, Kepler découvre les propriétés de l'ellipse. Selon certains historiens, cette découverte s'apparente à une prise de conscience de la non-perfection du cercle dans un domaine.

Après son détour par l'optique, Kepler revient à l'étude de l'orbite de Mars, plus déterminé que jamais. Il commence par se préoccuper de l'orbite terrestre. La raison de cette volonté d'améliorer la mesure de la position de la Terre est due au fait que cette planète est l'observatoire de tous les astronomes, les mesures étant bien évidemment effectuées depuis cette planète. Ainsi, la moindre erreur concernant la position terrestre aurait des conséquences sur la mesure de la position d'une autre planète.

Kepler envisage donc une nouvelle méthode : il veut calculer la mesure de la position de la Terre par triangulation. Cela consiste à mesurer la position de Mars et celle du Soleil à chaque fois que Mars se trouve au même point de son orbite, c'est-à-dire toutes les années martiennes, lesquelles comptent 687 jours. On voit bien que cette méthode pose le problème d'un nombre insuffisant de mesures à cause de l'intervalle de temps entre celles-ci : Kepler dispose en tout et pour tout de douze de ces mesures. Néanmoins, il aboutit à une découverte : la Terre a une vitesse plus grande lorsqu'elle est plus proche du Soleil. Comme nous l'avons vu, ce fait est déjà connu de Kepler en ce qui concerne les autres planètes du système solaire mais n'avait pas encore été mis en évidence pour la Terre jusque là. De plus, Kepler remarque que la vitesse de la Terre à l'aphélie et au périhélie, c'est-à-dire aux deux extrêmes de l'orbite, est proportionnelle à l'inverse de la distance au Soleil.

Kepler dispose désormais d'une idée précise de la trajectoire de la Terre, malgré qu'il la considère toujours comme une orbite pratiquement circulaire. Cela implique que le centre géométrique de la rotation ne coïncide pas avec le Soleil : ainsi, Kepler ne respecte pas ce qu'il avait énoncé dans l'introduction d'Astronomia Nova, à savoir que le Soleil doit être le centre physique de la rotation des planètes puisqu'il en est la cause. Qu'à cela ne tienne, il persévère et décide de s'attaquer à la question suivante : Comment prédire la position d'une planète sur son orbite à un moment déterminé si sa vitesse, comme il l'a montré, n'est pas constante?

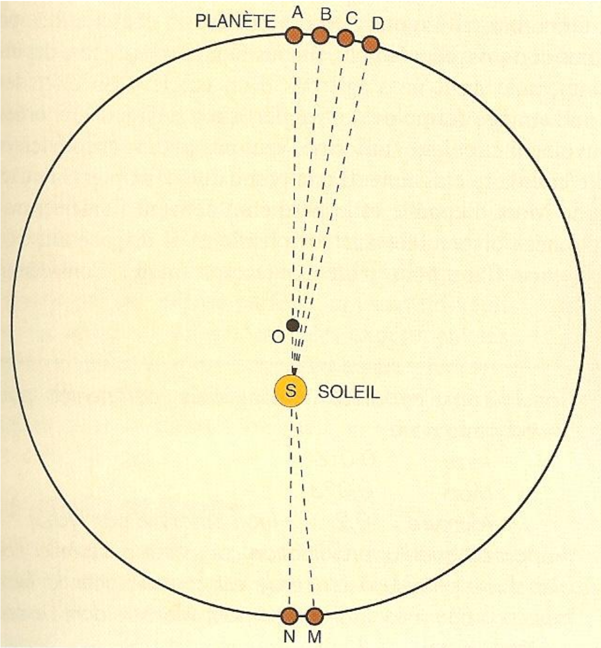

fig 6. (tiré de Lombardi, 2001)

Kepler suppose que la vitesse est proportionnelle à l'inverse de la distance au Soleil. Il divise donc l'orbite d'une planète en 360° quartiers. Sur chacune de ces parties de trajectoire, il considère que la vitesse ne varie pas, ce qui n'est qu'approximatif. Notons A, B, C… les points sur l'orbite qui délimitent les quartiers, S le Soleil et v la vitesse (figure 6).

Kepler suppose ce qui suit : $v_{AB} = \dfrac{AB}{t_{AB}} \propto \dfrac{1}{AS}$

Il écrit une égalité au moyen d'une constante de proportionnalité que nous noterons a :

$$v_{AB} = \frac{AB}{t_{AB}} = a\frac{1}{AS} \quad (1)$$

Kepler utilise cette relation pour calculer le temps nécessaire à une planète pour aller d'un point A de son orbite à un point N : $t_{AN} = t_{AB} + t_{BC} + \ldots + t_{MN}$

De la relation (1), il tire : $t_{AB} = \dfrac{AB \cdot AS}{a}, t_{BC} = \dfrac{BC \cdot BS}{a}$, etc.

Il suffit donc de faire la somme de tous ces temps pour obtenir t_{AB} :

$$t_{AN} = \frac{AB \cdot AS}{a} + \frac{BC \cdot BS}{a} + \ldots + \frac{MN \cdot MS}{a}$$

Comme AB = BC = … = MN et que *a* est une constante, Kepler peut mettre en évidence $\dfrac{AB}{a}$:

$$t_{AN} = \left(\frac{AB}{a}\right) \cdot (AS + BS + \ldots + MS)$$

L'astronome en conclut que le temps que met la Terre pour parcourir une distance donnée est proportionnel à la somme des rayons dans le quartier d'orbite que l'on considère. Il fait ensuite tendre le nombre de quartier vers l'infini et substitue à la somme infinie des rayons vecteurs(ou vecteurs position) l'aire de la portion d'orbite que l'on considère.

En conséquence, il énonce sa deuxième loi (dont on ne manquera pas de remarquer qu'elle apparaît avant la première) : le rayon vecteur balaie des aires égales en temps égaux. Kepler la nommera la « loi des aires ».

Loin de basculer dans le triomphalisme, Kepler met sa loi à l'épreuve des mesures en vue de la vérifier. Il doute en effet du bien-fondé de la substitution dont il a usé pour y parvenir et a raison de le faire : en effet, la somme infinie des vecteurs position n'équivaut en fait pas à l'aire constituées des triangles que ces vecteurs délimitent. Seulement voilà, lorsque l'on confronte les observations aux calculs, cette loi offre des résultats d'une remarquable précision. Kepler, avec un peu de mauvaise foi peut-être, passe donc sur ces imprécisions mathématiques comme chat sur braise et indique au lecteur que cette loi utilise un certain nombre d'approximations, qui selon lui « s'annulent ».

Arthur Koestler met en exergue le fait que Kepler se base en réalité sur trois suppositions dont nous savons qu'elles sont erronées pour parvenir à cette loi. En effet, il pense que l'orbite de la Terre est circulaire alors qu'elle est elliptique, il substitue une aire à la somme des vecteurs position et il croit que la vitesse de la planète varie comme l'inverse de la distance entre cette dernière et le Soleil.

Et pourtant! Il aboutit à une loi qui est vraie. Nous allons en effet être en mesure de la démontrer grâce au lois de la mécanique de Newton.

Démonstration actuelle de la deuxième loi

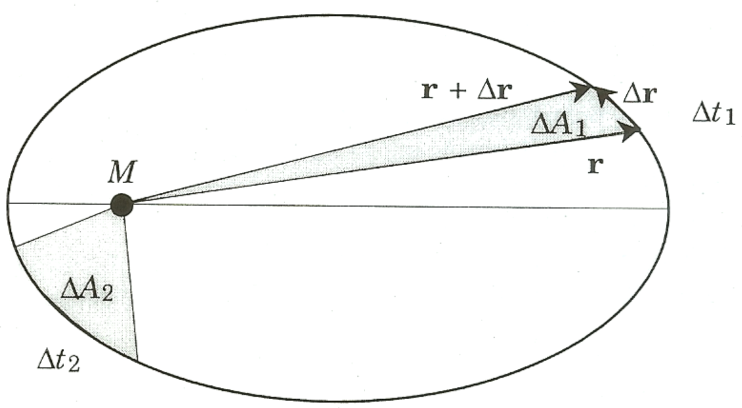

fig 7. Planète gravitant autour de M (tiré de Pilloud)

Nous rappelons que la loi dit : « Le vecteur-position $\vec{r}$ balaie des aires égales en temps égaux. »

Considérons une planète gravitant autour d'une masse *M*. Comme on le voit sur la figure 7, le vecteur-position $\vec{r}$ balaie un secteur ΔA en un intervalle de temps Δt. La loi nous dit que si $\Delta t_1 = \Delta t_2$, alors $\Delta A_1 = \Delta A_2$. En d'autres termes, le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ est constant.

Nous rappelons que ce que nous dit la définition du produit vectoriel : la magnitude du résultat d'un produit vectoriel est égale à l'aire du parallélogramme construit par les deux vecteurs.

L'aire du secteur triangulaire ΔA correspond à la moitié de l'aire du parallélogramme fabriqué par les vecteurs $\vec{r}$ et $\Delta\vec{r}$: $\Delta A = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge \Delta\vec{r}\right\|$

Divisons par Δt pour faire apparaître la vitesse aréolaire:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge \vec{v}\right\|$$

Multiplions par m pour faire apparaître la quantité de mouvement $m\vec{v}$: $m\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge m\vec{v}\right\|$

Par définition, le moment cinétique d'un corps n'est autre que le produit vectoriel de son vecteur-position $\vec{r}$ et de la quantité de mouvement $m\vec{v}$.

$$m\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left\|\vec{L}\right\| = \frac{1}{2}L$$

Le moment cinétique est constant lorsque la force est centrale, ce qui est le cas ici. En conséquence, le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ est bien constant.

Après avoir découvert la loi des aires, qui sera ensuite connue sous le nom de la deuxième loi de Kepler, l'astronome revient à l'étude de l'orbite de Mars puisqu'il a en effet déterminé l'orbite de la Terre avec suffisamment de précision pour pouvoir interpréter ses mesures de manières correcte.

En premier lieu, ses observations l'amènent à constater que l'orbite de Mars n'est définitivement pas circulaire. Il nous dit en effet : « Comme tu l'auras compris, cher lecteur, il nous faut tout reprendre depuis le début (…). Je soupçonne fort qu'il ne s'agit pas d'un cercle. »

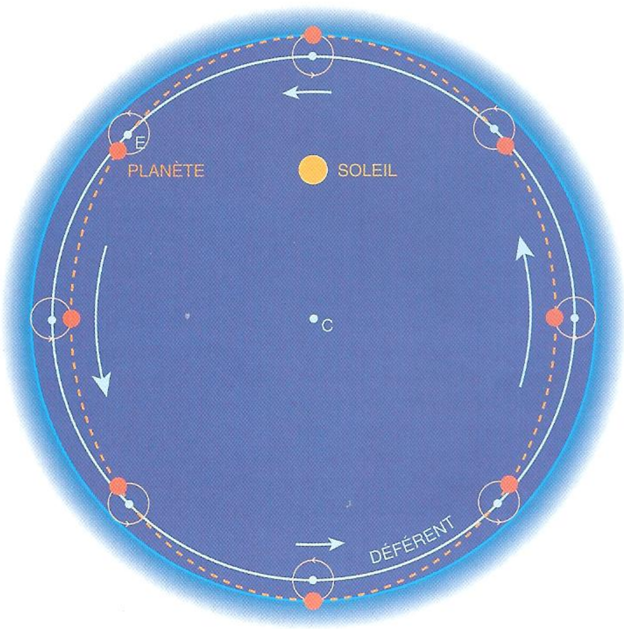

fig 8. Epicycle imaginé par Kepler (tiré de Lombardi, 2001)

Cependant, la perfection du cercle continue d'exercer un attrait indiscutable sur Kepler ; il tente à nouveau de mettre au point un modèle usant d'un épicycle. Le changement réside dans le fait que le centre de l'épicycle ne se déplace plus selon un MCU sur le déférent. En traitillé orange sur la figire 8, l'orbite résultante est ovale, c'est-à-dire qu'elle apparaît plus écrasée au périhélie qu'à l'aphélie. Pour tester ce modèle, l'astronome le confronte à la deuxième loi. Or, pour ce faire, il lui faut calculer l'aire de portions de cet ovale, ce qui est loin d'être aisé puisqu'un ovale n'a pas d'équation définie. C'est à ce moment-là que Kepler décide d'approximer cet ovale par une ellipse pour être en mesure d'appliquer sa deuxième loi plus facilement, sans se douter qu'il vient de mettre le doigt sur la solution! On a la curieuse impression qu'il s'entête systématiquement à refuser la possibilité de l'ellipse. Il déclare même : « Si seulement l'orbite était une ellipse, le problème aurait déjà été résolu par Archimède et Apollonius ». Cependant, l'approximation qu'il fait n'aboutit pas à un résultat satisfaisant lorsqu'on compare la distance prévue entre le centre de l'orbite et la planète à celle que l'on mesure.

Cela amène Kepler à s'interroger momentanément au sujet de sa deuxième loi : il va jusqu'à recommencer pratiquement tous les calculs à l'origine de cette dernière pour finalement la conserver telle qu'il l'a énoncée. En conséquence, il abandonne l'épicycle qu'il avait imaginé.

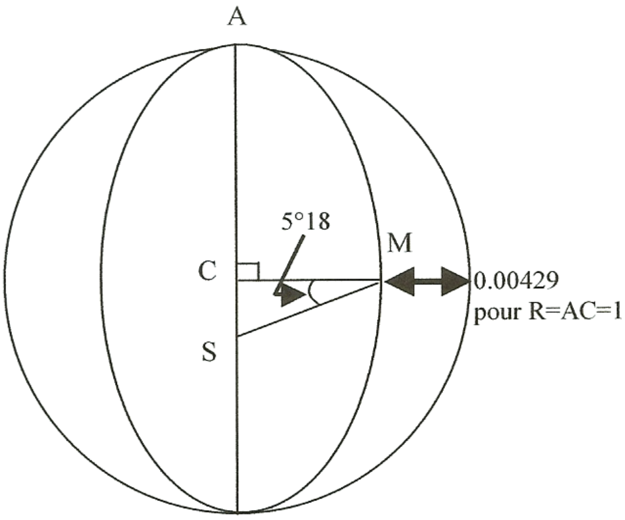

fig 9. Mesure de la déviation (tiré de Lombardi, 2001)

Kepler n'a donc toujours pas de réponse à cette orbite ovale. Pour remédier à cela, il inscrit l'orbite dans un cercle que l'on nomme volontiers cercle auxiliaire, en vue de mesurer sa déviation par rapport à l'orbite circulaire parfaite. Il mesure ainsi le rapport AC/CM qui, on le voit facilement sur la figure 9, est d'autant plus grand que la déviation par rapport au cercle est grande. Lorsque Mars se trouve à mi-chemin entre les deux absides, ce rapport vaut 1,00429. Il mesure également l'angle dont le sommet est M entre C et S à cette même position et trouve 5°18'. Or, la sécante de cet angle, c'est-à-dire l'inverse du cosinus, vaut précisément 1,00429 ! Par la trigonométrie, on voit que cet angle n'est autre que MS/MC. Kepler observe que l'égalité entre ces deux rapports se vérifie en tout point de l'orbite.

Grâce à ce constat et suites à diverses manipulations géométriques et mathématiques que nous ne détaillerons pas ici, Kepler obtient la relation $r(\beta) = 1 + e\cos(\beta)$ fait dépendre la distance au Soleil d'un angle β que l'on voit sur la figure 10 et de l'excentricité e qui n'est autre que le rapport $\frac{CS}{SM}$.

Cependant, Kepler ne crie pas encore victoire, et ce pour des raisons qui diffèrent selon les ouvrages. Arthur Koestler pense en effet que Kepler n'avait pas connaissance du fait que cette relation désigne une ellipse tandis que d'autres mettent en avant le fait que cette relation fait dépendre la distance au soleil d'un angle dont le sommet se trouve au centre de l'orbite, qui ne coïncide pas avec le Soleil et n'est donc qu'un point mathématique. Or, cela ne satisfait pas Kepler qui a déjà souligné auparavant que tout doit avoir une justification physique.

Toujours est-il que Kepler ne se voit pas satisfait et reprend ses calculs. Cette fois, il s'attache à déterminer la distance au soleil en fonction d'un angle différent que celui qu'il a traité précédemment. A nouveau, nous n'entrerons pas dans les détails de ses calculs. Il aboutit à la relation $r(\alpha)=\dfrac{p}{1+e\cos(\alpha)}$ qui donne la distance du Soleil à la planète en fonction de l'angle α de la figure 10, ce qui n'est autre que l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires.

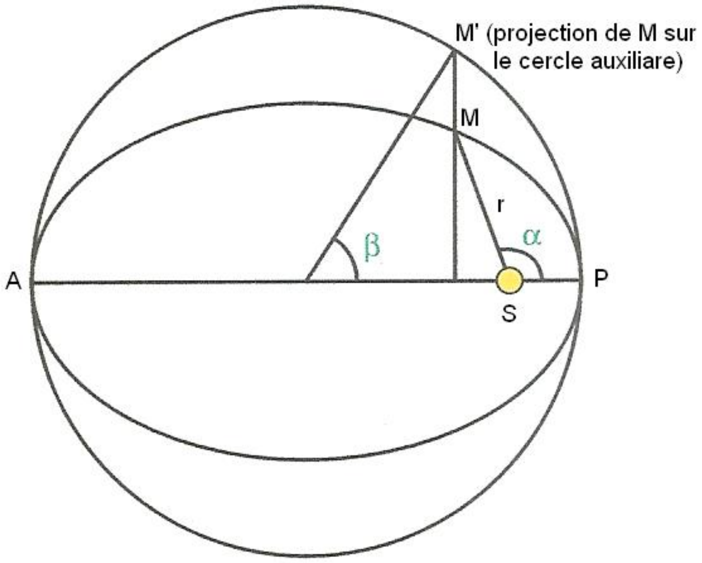

fig 10. Les angles utilisés par Kepler dans ces calculs (tiré de Lombardi, 2001)

Après quelques doutes, Kepler se rend alors compte que ses deux résultats sont des orbites elliptiques et résume les événements de la manière suivante : «La Vérité de la Nature que j'avais repoussée et chassée revint en tapinois par la petite porte pour se faire accepter. C'est-à-dire, je mis de côté l'équation originale et retombai sur les ellipses, croyant que c'était une hypothèse différente alors que les deux sont une seule et même chose… je faillis devenir fou à chercher une raison expliquant pourquoi la planète préférait une orbite elliptique… Ah ! quel étourneau j'ai été ! » (tiré de Koestler, 1973).

Au bout de six ans de dur labeur, l'astronome est enfin venu à bout de l'orbite de Mars et il parvient ainsi à sa première loi qui nous dit que les orbites des planètes sont elliptiques et que le Soleil se trouve à l'un de leurs foyers. Kepler n'utilise cependant pas le terme foyer dans *Astronomia Nova*, alors qu'il en a fait usage dans ses travaux sur l'optique. Il étendra l'usage de ce terme à l'astronomie dans un ouvrage reprenant ses lois intitulé l'Epitome qu'il publiera en 1622. Bien que la première soit parfaitement démontrable aujourd'hui, nous ne le ferons pas ici car cela exige des connaissances mathématiques trop avancées pour nous.

5. Harmonice Mundi

Après avoir découvert ses deux premières lois, Kepler commence à rédiger un traité sur l'Harmonie du monde, Harmonice Mundi. Ce traité, achevé en 1618, porte sur une conception de l'harmonie bien différente de celle d'aujourd'hui. En effet, si de nos jours cette discipline nous évoque uniquement la science des accords, Kepler lui accorde une signification et une importance d'une toute autre mesure. Selon lui, l'Harmonie, grâce à certaines proportions géométriques et certains intervalles musicaux, régit l'univers dans son ensemble. Kepler généralise ce concept au point de l'appliquer non seulement aux mathématiques mais aussi à la musique, l'astrologie, la façon de gérer un état, l'architecture et finalement l'astronomie. Nous restreindrons notre étude d'*Harmonice Mundi* à ce dernier domaine en nous intéressant particulièrement à son cheminement vers la troisième loi.

Pour ce faire, il nous sera au préalable nécessaire d'évoquer certaines notions concernant les intervalles musicaux. Par définition, un intervalle existe entre deux sons de hauteurs différentes. Un son est une onde ; on le définit donc par sa fréquence, exprimée en hertz (Hz). Ainsi, un intervalle se caractérise par le rapport des fréquences des deux sons, ou notes, qui le constituent. A l'époque de Kepler, la notion d'onde est bien sûr inconnue mais ce rapport de fréquence se retrouve dans le rapport de la longueur des cordes ou des tuyaux utilisés pour produire les deux sons, ce qui a permis aux pythagoriciens déjà de travailler sur ces rapports. On distingue les intervalles consonants, agréables à l'oreille, des intervalles dissonants. Un intervalle est consonant si le rapport des fréquences des deux sons qui le constituent peut être considéré comme simple. Les intervalles consonants sont ainsi la tierce majeure (5/4), la tierce mineure(6/5),la quarte juste (4/3), la quinte (3/2), la sixte majeure (5/3) et la sixte mineure (8/5). Kepler explique cela dans le premier livre d'Harmonice Mundi en mettant ces rapport en relation avec les solides de Platon (encore eux !). Selon lui, les intervalles consonants sont nettement supérieurs aux autres.

En vue d'appliquer ses théories sur l'Harmonie à l'astronomie, l'astronome se met en quête d'une loi « harmonique » qui fasse dépendre l'excentricité de l'orbite d'une planète et sa distance moyenne au Soleil. Pour cela, il calcule la vitesse angulaire de chaque planète au périhélie, c'est-à-dire là où la vitesse $\vec{v}$ est maximale, et à l'aphélie, où elle est minimale. Il associe le rapport de ces deux vitesses angulaire avec un intervalle dont le rapport s'en approche. Il calcule également les rapports des vitesses angulaires maximales et minimales de planètes voisines, qu'il associe eux aussi à des intervalles en distinguant cette fois des intervalles « convergents », qui résultent du rapport de la vitesse à l'aphélie de la planète interne avec la vitesse au périhélie de la planète externe et les intervalles « divergents », qui

Planète	Distance angulaire parcourue en 24h	Intervalle musical	Intervalle "convergent"	Intervalle "divergent"
Saturne	Aphélie 1'46" = a Périhélie 2'15" = b	1'48"/2'15" = 4/5 tierce majeure	b/c = 1/2	a/d = 1/3
Jupiter	Aphélie 4'30" = c Périhélie 5'30" = d	4'35"/5'30" = 5/6 tierce mineure	d/e = 5/24	c/f = 1/8
Mars	Aphélie 26'14" = e Périhélie 38'01" = f	25'21"/38'01" = 2/3 quinte	f/g = 2/3	e/h = 5/12
Terre	Aphélie 57'03" = g Périhélie 61'18" = h	57'28"/61'18" = 15/16 demi-ton	h/i = 5/8	g/k = 3/5
Vénus	Aphélie 94'59" = i Périhélie 97'37" = k	94'50"/98'47" = 24/25 demi-ton chromatique	k/l = 3/5	i/m = 1/4
Mercure	Aphélie 164'00" = l Périhélie 394'00" = m	164'00"/394'00" = 5/12 octave + tierce mineure		

Tableau 1. Paramètres des planètes (tiré de Lombardi, 2001)

correspondent au rapport de la vitesse à l'aphélie de la planète externe avec la vitesse au périhélie de la planète interne. Le tableau 1 résume ces calculs :

Kepler, pour qui la corrélation d'une certaine précision entre le rapport de ces vitesses angulaires et certains intervalles conforte sa conviction que l'univers est régit par l'Harmonie, décide d'aller plus loin et de véritablement faire de la musique avec les planètes du système solaire. Les sourcils des lecteurs ne manqueront pas de se hausser à cette idée, mais quoi de plus normal pour notre astronome que de mettre en lumière la beauté, autrement dit l'Harmonie de la création, par une sorte de mélodie céleste ? Il associe ainsi la vitesse angulaire minimale de Saturne avec la note sol. La note « produite » par Saturne varie avec sa vitesse angulaire ; elle va produire un glissando continu du sol vers une note plus haute. Il procède de la même manière avec les autres planètes et obtient ainsi un chant à six voix.

Kepler fait remarquer que les vitesses angulaires de la Terre et de Vénus varient peu en raison de leurs orbites peu excentriques ; en conséquence, la note produite est pratiquement toujours la même. En l'occurrence, la Terre « chante » sol et Vénus mi-mi bémol. L'intervalle formé par ces deux planète est donc une sixte mineure ou une sixte majeure, selon que le mi de vénus est bécarre ou bémol. Kepler s'empare de cette particularité avec enthousiasme et dresse la liste des accords fondés sur ces deux sixtes.

Aujourd'hui, il nous paraît douteux, voire même délirant d'écouter ainsi une hypothétique musique céleste jouée par des planètes. Ces idées peuvent sembler en contradiction avec les travaux d'un Kepler qui nous semble parfois cartésien avant l'heure, émettant une hypothèse en s'intéressant aux causes des faits observés et la vérifiant ensuite expérimentalement. Cependant, force nous est de constater que ces deux façons de procéder ne se distinguent pas du point de vue de cet astronome, et que lui ne placera jamais ses lois sur un piédestal par rapport au reste de son œuvre : pour lui, elle ne possèdent pas plus de valeur que son modèle des solides platoniciens ou ses applications de l'Harmonie à des domaines aussi variés que l'architecture ou la politique.

Après avoir écrit sa musique du cosmos, Kepler s'atèle à la recherche d'une dépendance entre les distances moyennes des planètes au Soleil et leurs vitesse moyenne qui aurait un lien avec le concept d'Harmonie. Kepler montre qu'il n'existe pas de relation directe entre les rayons des orbites des planètes et des intervalles musicaux de la gamme. Par contre, Kepler vient de mettre en « relation harmonique » les vitesses maximales et minimales des planètes. Pour lui, le fait que ces vitesses soit régies par l'harmonie lui indique qu'il doit orienter ses recherches vers une relation entre les vitesses des planètes et les rayons de leurs orbites. Plutôt que de continuer à distinguer vitesses à l'aphélie et au périhélie, il décide de s'intéresser à la période de révolutions des planètes, laquelle dépend de bien sûr de la vitesse moyenne de planète et de son orbite.

Des années auparavant, alors qu'il rédigeait le Mysterium Cosmographicum, l'astronome avait observé que les périodes de révolutions des planètes ne variaient pas linéairement avec leurs rayons. Autrement dit, pour deux planètes à distances r_1 et r_2 du soleil de période de révolution T_1 et T_2, la relation $\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2}$ est erronée. Kepler tente alors une dépendance quadratique qui elle non plus, ne donne pas de résultat probants. Loin de se décourager, Kepler remarque que si la dépendance linéaire n'induit pas une variation assez grande des périodes, la dépendance quadratique les fait varier de manière trop importante. Il en conclut que l'exposant en question doit se trouver entre 1 et 2.

La suite de sa démarche diffère quelque peu selon les historiens : certains pensent que Kepler aurait procédé de manière empirique en testant plusieurs exposant fractionnaires compris entre 1 et 2 et qu'il serait ainsi « tombé » presque par hasard sur l'exposant correct, 3/ 2. D'autres, à l'image d'Alexandre Koyré, soutiennent que le choix de Kepler est dû au fait que le rapport 3/2 correspond à la quinte, intervalle consonant jugé supérieur par les pythagoriciens.

Kepler parvient ainsi au bon exposant et énonce sa troisième loi de la manière suivante : « La proportion qui lie les temps périodiques de chaque couple de planètes est précisément la proportion sesquialtère [3/2] des distances moyennes. » (Lombardi, 2001)

De nos jours, on dit plus volontiers que le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnelle au cube du demi grand axe de son orbite ou en formule : $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

A l'instar de la deuxième loi, il nous est aujourd'hui possible de démontrer la troisième grâce aux travaux de Newton sur la mécanique et la gravité.

Démonstration actuelle de la troisième loi

Nous nous restreindrons ici au cercle, cas particulier de l'ellipse qui elle exigerait des connaissances mathématiques que nous ne possédons pas.

La troisième loi nous dit que le carré de la période de révolution T des planètes autour du Soleil est proportionnel au cube du demi grand axe a de leurs orbite ce qui revient à dire que $T^2 = ka^3$, k étant une constante.

Pour démontrer cela, nous utiliserons la loi de gravitation universelle de Newton et ses lois de la dynamique.

Considérons une planète de masse m tournant autour du Soleil en un mouvement circulaire uniforme (MCU). Selon la loi de la gravitation universelle de Newton, la force d'attraction entre les deux s'écrit : $F = G\frac{mM}{r^2}$. Or, pour un MCU, la deuxième loi de la dynamique nous dit : $F = ma = m\frac{v^2}{r}$ en simplifiant ces deux équations, on obtient la vitesse : $v^2 = G\frac{M}{r}$ ce qui nous permet de trouver aisément la période : $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ que nous élevons au carré : $T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 = kr^3$

Conclusion

Au début de ce travail, nous avons annoncé vouloir répondre à la question suivante : comment, à l'aide des seules connaissances qu'il possédait, Kepler est-il parvenu à ses trois lois ? Nous avons retracé sa démarche et sommes à présent en mesure de la commenter.

En premier lieu, dans notre étude du Mysterium Cosmographicum, nous avons mis en évidence l'attrait exercé par les solides de Platon sur Kepler. Le modèle qu'il base sur ces polyèdres est représentatif de sa démarche dans la mesure où il montre la volonté de l'astronome de rechercher la beauté, la perfection du monde tel que Dieu l'a créé.

Cet ouvrage met également en lumière l'ouverture d'esprit de Kepler, puisqu'il va à l'encontre des traditions en affirmant que les orbites des planètes ne sont pas circulaires et que les vitesses des planètes ne sont pas uniformes. Cette ouverture d'esprit se verra confirmée tout au long de la vie de l'astronome, notamment par le fait que ses lois porteront le coup de grâce final aux dogmes cités dans le premier chapitre de ce travail.

Kepler fait également preuve de ses qualités révolutionnaires en matière de démarche scientifique à l'époque : comme nous l'avons vu, il est le premier à s'intéresser aux causes du mouvement des planètes. Même si l'on doit la théorie de la gravitation à Newton, il n'en reste pas moins que Kepler se montre déjà convaincu que le Soleil est la cause du mouvement des planètes.

Le début d'Astronomia Nova semble en contradiction avec ce qui précède : en effet, les travaux sur un nouveau genre de point équant reviennent à la méthode de la vieille astronomie, ce qui consiste comme nous l'avons souvent dit à sauver les apparences en usant uniquement de cercles. Cependant, Kepler se distancie de cette manière de procéder dans la mesure où il condamne sa théorie pour cause d'une imprécision de seulement deux à dix minutes d'arc. Il se rend effectivement compte que la précision des mesures de Tycho Brahe est désormais trop grande pour que l'astronomie tolère de tels écarts, ce qui témoigne une nouvelle fois d'une démarche progressiste.

Que dire de la manière dont Kepler aboutit à sa deuxième loi ? Sa méthode nous laisse une impression mitigée : même si elle apparaît relativement sérieuse et scientifique puisqu'il admet faire des hypothèses et devoir les vérifier ensuite, il fait également des suppositions erronées, et ce en toute connaissance de cause dans le cas de la substitution de la somme des rayons vecteurs par l'aire de la portion d'orbite prise en compte. Cependant, force nous est de constater que la loi qu'il obtient est vraie! Alors, notre astronome serait-il chanceux ? La part dédiée à la chance nous semble bien difficile à estimer, que ce soit en ce qui concerne les lois de Kepler ou toute autre découverte scientifique. Cependant, si le hasard a peut-être fait le bonheur de Kepler dans certains cas, il nous semble difficilement justifiable d'affirmer que les découvertes qui serviront de base à Newton pour sa théorie de la gravitation soient uniquement dues à la chance.

En ce qui concerne la première loi, le travail fourni par Kepler pour y parvenir apparaît d'une tout autre nature : il se fonde uniquement sur l'observation et non sur des hypothèses. Cela peut sembler se rapprocher de l'astronomie d'avant Kepler, avec ceci de différent qu'il rejette, non sans quelques réticences, l'idée d'orbites construites à l'aides de cercles et parvient ainsi à l'ellipse après des mois et des mois de calculs.

La découverte de la troisième loi, quant à elle, nous déconcerte. Comment se fait-il qu'une loi aujourd'hui démontrable jaillisse d'un ouvrage portant sur l'Harmonie du monde, concept discutable s'il l'en est?

Ce paradoxe, auquel aucun historien des sciences n'a pu apporter de réponse claire si ce n'est en invoquant le génie si particulier de Kepler, résume notre travail sur le cheminement de l'astronome jusqu'à ses trois lois. Sa démarche, oscillation constante entre hypothèses fausses, intuitions géniales et considérations quasiment mystiques, servie par son travail acharné, suscitera sans nul doute encore bien des débats.

Bibliographie

KOESTLER Arthur, *les Somnambules*, Paris, Le Livre de Poche, 1973

LOMBARDI Anna Maria, Kepler, le musicien du ciel, *in Pour la Science*, n° 8, août 2001

LERNER Michel-Pierre, Ptolémée, bien avant Copernic, in *Les cahiers de Science et Vie*, n° 21, Juin 1994

BERBARDEAU Thierry et PINEAU Marcel, *La musique*, Nathan,1995, *Repères pratiques* n° 45.

FISCHER, Gaston. Le géocentrisme de Ptolémée et l'héliocentrisme de Copernic, in *Bulletin de la SENS*, 23.

SEGONDS Alain, La longue guerre contre Mars, in *Les cahiers de Science et Vie*, n° 21, Juin 1994

PILLOUD Jean-Jacques, *La Gravitation*, cours distribué au lycée Denis-de-Rougemont, Neuchâtel.

PANTIN Isabelle, Les clairs-obscurs d'un génie allemand, in *Les cahiers de Science et Vie*, n°21, Juin 1994

KOYRÉ Alexandre, *La révolution astronomique*, Paris, Herman, 1961.

Liens Internet

http://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

http://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Platon

http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/planete.html

http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/92107110.pdf

http://gc.saliege.fr/projet/ballade/platon1.htm

http://ndirty.cute.fi/~karttu/Kepler/muuta/Rias04.pdf