# Euler et le centre d'une similitude

André Calame[1]

## Un problème de géométrie élémentaire

Lors du 30e anniversaire de Math-Ecole en novembre 1991, le professeur Francis Gutmacher, spécialiste des Jeux mathématiques et logiques, posait la question suivante à quelques enseignants, didacticiens et méthodologues : « *Quelle est la qualité première pour faire des mathématiques* ? » Et chacun d'y aller de sa réponse spontanée: savoir raisonner, avoir du goût pour l'abstraction, aimer les calculs, avoir le sens de la déduction logique, etc. « *Pour moi*, reprend alors Gutmacher, *la qualité première, c'est l'imagination et le mathématicien qui a montré le plus d'imagination, c'est EULER* ».

Nous voudrions donner ici un exemple de l'imagination d'Euler dans la résolution d'un problème de géométrie élémentaire. Etant donné deux segments AB et A'B' (fig. 1), trouver le centre de la similitude qui transforme AB en A'B'.

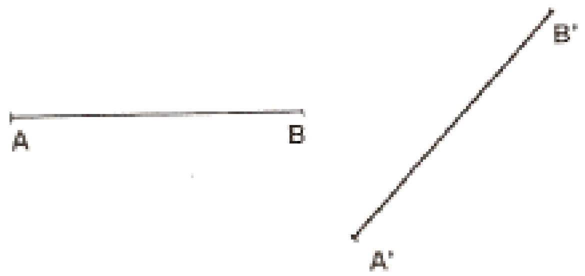


**fig 1.** recherche du centre de similitude qui transforme AB en A'B'

Précisons qu'il s'agit d'une similitude directe qui conserve l'orientation des figures. Cette similitude est la composition d'une homothétie et d'une rotation autour d'un centre M à déterminer. Nous supposons que AB et A'B' ne sont pas parallèles; en cas de parallélisme, la similitude se réduirait à une homothétie dont le centre est à l'intersection des droites M'et BB', à moins que AB=A'B' auquel cas la similitude serait une translation.

Avant d'examiner la construction imaginée par Euler, prouvons d'abord que les points A, B et leurs images A', B' déterminent complètement la similitude directe. Nous traitons cette question dans le plan de Gauss où chaque point est représenté par un nombre complexe $z = x + yi$.

## Détermination de la similitude

Soit s la similitude qui transforme $z_1$ en $w_1$ et $z_2$ en $w_2$ (fig. 2).

Posons : $a = \dfrac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}$

Le module de a est : $|a| = \left|\dfrac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right| = \dfrac{|w_2 - w_1|}{|z_2 - z_1|} = k > 0$ . Il représente le facteur k de l'homothétie liée à la similitude.

[1] Professeur, 2026 Sauges. L'article a été scanné et remis en page en janvier 2008.

L'argument de a est : $\arg(a) = \arg\left(\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(w_2 - w_1) - \arg(z_2 - z_1) = \alpha$, il représente la mesure $\alpha$ de l'angle de rotation de la similitude.

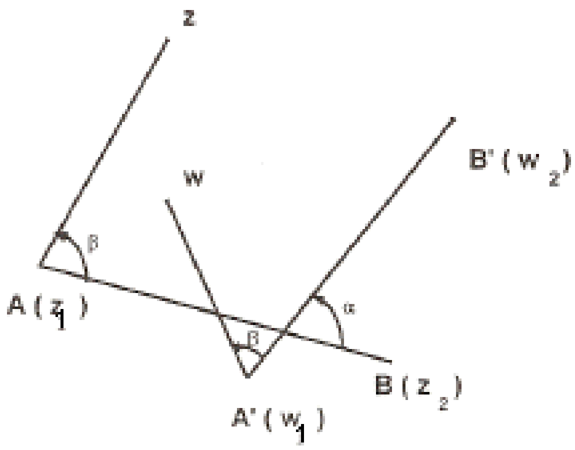


**fig 2.** passage dans le plan de Gauss

Soit z un point quelconque du plan de Gauss et w son image. On doit avoir également[1] :

$$a = \frac{w - w_1}{z - z_1}$$

La similitude est complètement déterminée par la relation :

$$\frac{w - w_1}{z - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}$$

qui peut aussi s'écrire: $w = az + b$ ou $b = w_1 - az_1$

Toute similitude directe est donc de la forme w = az + b.

## Existence et unicité du centre de similitude

Pour la similitude w = az + b, un point fixe $z_0$ est donné par l'équation: $z_0 = a z_0 + b$ qui a pour solution unique:

$$z_0 = \frac{b}{1 - a}$$

Ce centre $z_0$ existe pour autant que a soit différent de 1, c'est-à-dire chaque fois que la similitude ne se réduit pas à une translation, ce que nous avons exclu plus haut.

## Première construction d'Euler

Voyons maintenant comment Euler détermine le centre de la similitude qui transforme A en A' et B en B' (fig. 3). Soit I le point d'intersection des droites AB et A'B'.

Euler construit d'une part le cercle qui passe par A, A' et I; d'autre part le cercle qui passe par B, B' et I. Ces deux cercles qui passent tous deux par I se coupent en un second point M qui est le centre de similitude cherché.

[1] L'article original détaille ce point qui s'obtient en utilisant pour z, $z_1$ et leurs images, les arguments utilisés pour $z_1$ et $z_2$ et leurs images (ndlr).

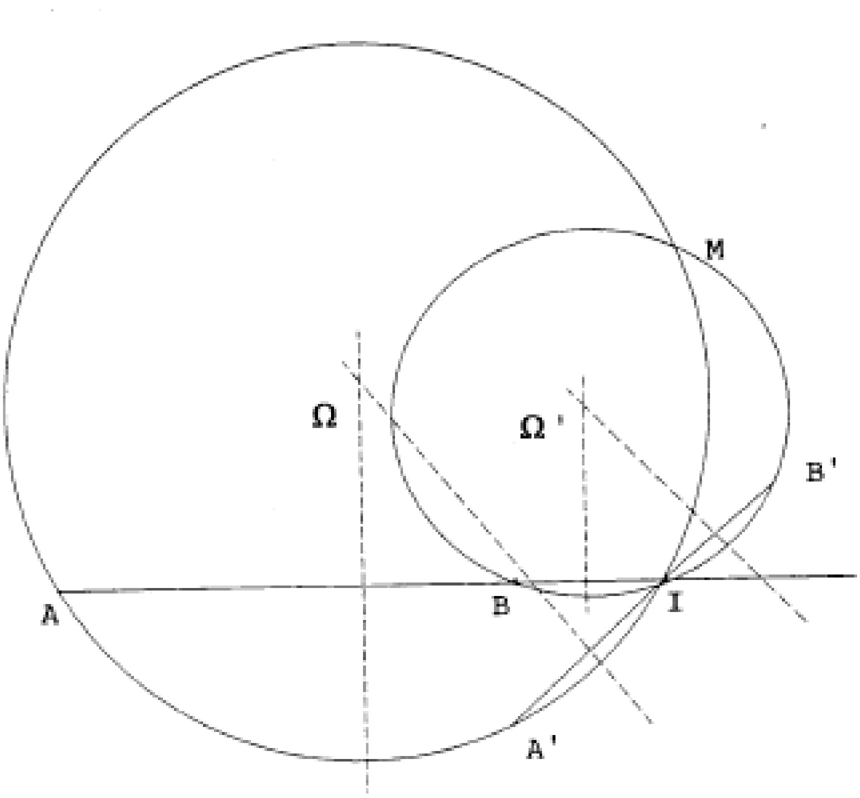


**fig 3.** première construction d'Euler

**Justification**

Supposons connu le centre de similitude M. La similitude des triangles MAB et MA'B' entraîne les égalités suivantes (fig. 4a, MA' à l'intérieur de AMB et fig. 4b, MA' à l'extérieur de AMB) : $\mu = \mu'$ ; $\alpha = \alpha'$ ; $\beta = \beta'$

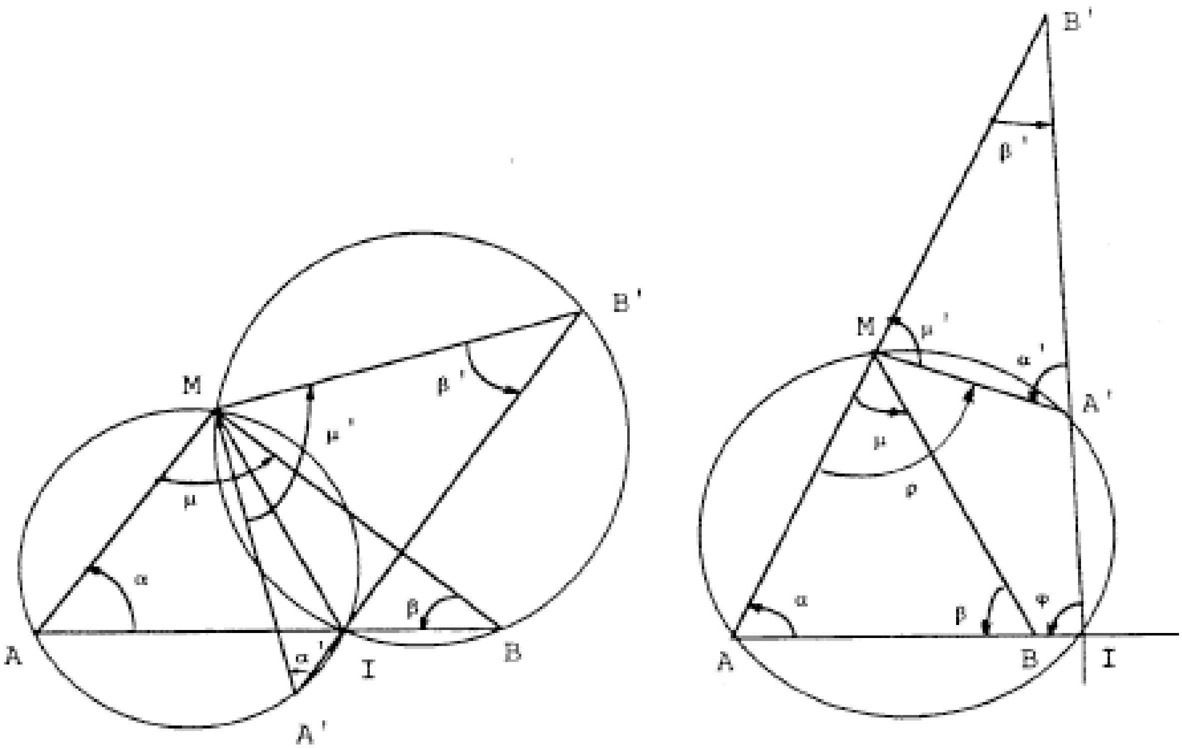


**fig 4a & 4b.** deux cas de figure pour la justification de la première construction d'Euler

Dans la figure 4a, il en résulte que le quadrilatère croisé MAIA' a deux angles opposés égaux: $\alpha$ et $\alpha'$. Ce quadrilatère est donc inscriptible, si bien que le cercle qui passe par A, A' et I passe aussi par M. De même le quadrilatère MBIB' est aussi inscriptible et le cercle qui passe par B, B' et I passe également par M.

Dans la figure 4b, le quadrilatère convexe MAIA' a deux angles opposés supplémentaires (somme des angles du quadrilatère MBIA' égale à 360°) :

$$\varphi + \rho - \mu\ (180-\alpha') + (180-\beta) = 360\ [°]$$

$$\varphi = \alpha' + \beta + \mu - \rho = 180 - \rho\ [°]$$

Le quadrilatère est donc inscriptible. Par analogie, il en est de même du quadrilatère MBIB'.

Dans cette construction, le point I joue un rôle fondamental, bien qu'il ne soit pas invariant dans la transformation.

## Deuxième construction d'Euler

Euler aurait pu se contenter de la construction qui vient d'être décrite. Mais son imagination le pousse à poursuivre le raisonnement. Si l'on mène (fig. 5) la perpendiculaire en A à AB et la perpendiculaire en A' à A'B', ces droites se coupent en un point $\overline{A}$. Le quadrilatère $AIA'\overline{A}$ est inscriptible puisque les angles en A et A' sont droits; A est donc sur le cercle passant par A, A', I. De plus, $\overline{A}$I est un diamètre de ce cercle.

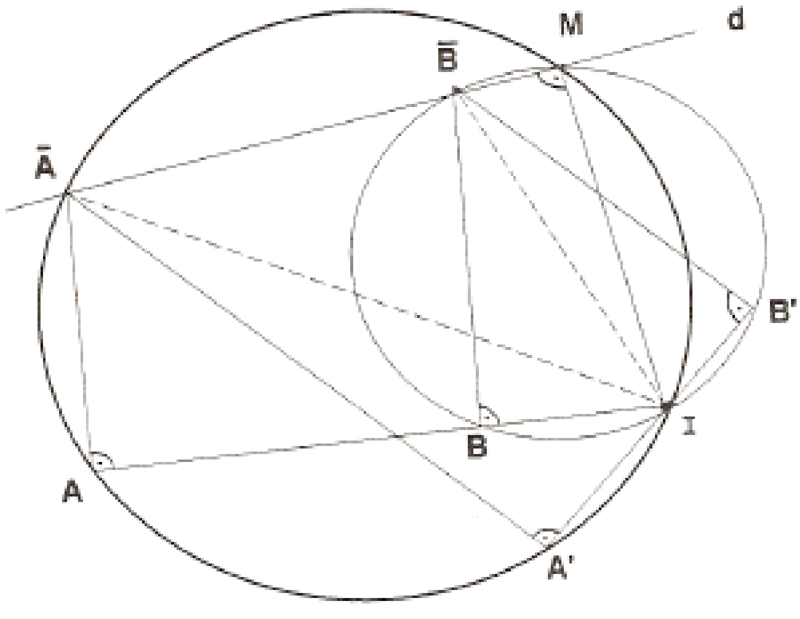


**fig 5.** deuxième construction d'Euler

De même, les perpendiculaires menées par B à AB et par B' à A'B' se coupent en un point $\overline{B}$, sur le cercle passant par B, B', I et $\overline{B}$I est un diamètre de ce cercle.

Revenons au point M. Dans le cercle de diamètre $\overline{A}$I, l'angle $\overline{A}$MI est droit, comme inscrit dans un demi-cercle; de même, dans le cercle de diamètre $\overline{B}$I, l'angle $\overline{B}$MI est droit. Il en résulte que les points $\overline{A}$, $\overline{B}$, M sont alignés sur une droite d et que IM est perpendiculaire à cette droite d.

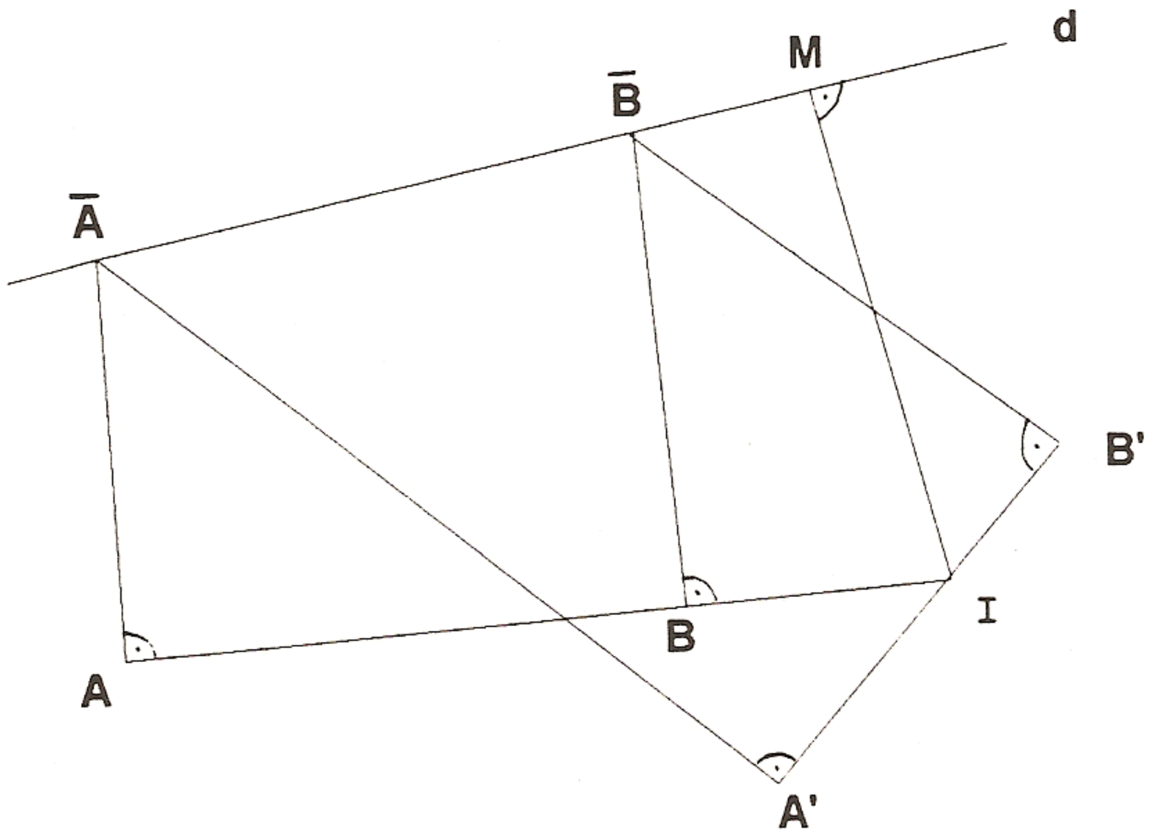


**fig 6.** deuxième construction d'Euler sans les échafaudages

Enlevons maintenant les échafaudages (fig. 6) de cette construction. Euler construit le centre de similitude M en cinq "coups" d'équerre et un "coup" de règle selon la "recette" suivante:

1) Mener la perpendiculaire en A à AB.

2) Mener la perpendiculaire en A' à A'B'. Ces perpendiculaires se coupent en $\overline{A}$.

3) Mener la perpendiculaire en B à AB.

4) Mener la perpendiculaire en B' à A'B'. Ces perpendiculaires se coupent en $\overline{B}$.

5) Mener la droite d qui passe par $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

6) Abaisser de 1 la perpendiculaire sur d. Cette perpendiculaire coupe d au point M cherché.

Voilà comment l'imagination d'Euler permet de faire l'économie de la construction de cercles.

En conclusion, il semblerait possible de présenter sous forme d'atelier en quatrième année secondaire cette recherche du centre de similitude (sans recours aux complexes, bien sûr !). On aurait ainsi l'occasion d'utiliser les connaissances sur les angles inscrits dans un contexte naturel.