Le paradoxe de Langevin

Eric Jeannet[1]

1. Introduction

Au début du siècle, on pensait encore en termes de temps universel et d'espace absolu, notions inventées par Newton, esprit mystique, assoiffé d'absolu.

L'énoncé de la première loi de Newton « un corps qui n'est soumis à aucune force est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme » est identique à l'énoncé de Galilée. Pour Galilée, le repère pour mesurer les mouvements était la Terre. Pour Newton, il n'yen avait pas; alors il inventa l'espace absolu dans lequel le « centre du monde » - pour lui, le centre de gravité du système solaire - était au repos et parallèlement il inventa le temps absolu « qui s'écoule uniformément, indépendamment de toute chose ».

Plus tard, lorsque le caractère ondulatoire de la lumière fut unanimement reconnu, on inventa le milieu hypothétique, l'éther luminifère, siège des vibrations lumineuses. Et l'on avait de bonnes raisons d'affirmer que l'éther était au repos dans l'espace absolu.

La relativité restreinte trouve son origine dans les deux faits suivants, l'un théorique, l'autre expérimental :

(A) L'équation fondamentale de la dynamique $Md^2x/dt^2 = F$ est invariante par rapport à une transformation de Galilée x' = x-vt, où v est la vitesse du système de référence Ox' le long du repère Ox. Par contre, les équations de l'électromagnétisme de Maxwell sont invariantes par rapport aux transformations suivantes, proposées par Lorentz :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Ces transformations font apparaître un temps propre, lié au système considéré. Inversement, on peut écrire:

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(B) L'expérience de Michelson-Morley, dont le but était la mesure de la vitesse de leur interféromètre dans l'éther, ne donna pas de résultat, sinon que l'éther était entraîné par la Terre dans son mouvement.

En réfléchissant à ces faits, Einstein fut amené à faire la constatation suivante : dans la loi d'induction de Faraday, on a deux cas de figure:

- La boucle conductrice est fixe dans l'éther; l'aimant en mouvement induit un champ électrique qui produit une force sur les charges au repos; les charges libres accélérées produisent le courant induit.

[1] Institut de physique, Université de Neuchâtel. L'article a été scanné et remis en page en janvier 2008.

- L'aimant est fixe dans l'éther; les charges de la boucle en mouvement subissent une force magnétique due au champ de l'aimant; les charges libres, accélérées produisent le courant induit.

Dans les deux cas, le courant est le même : il est dû au mouvement relatif de la boucle et de l'aimant. L'éther immobile n'est pas nécessaire. Et si l'éther n'existe pas, l'espace absolu n'a pas de sens et le temps universel n'est pas défini. Einstein couronna son raisonnement par l'énoncé de deux postulats:

- *Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les systèmes de référence qui ne subissent pas d'accélération réciproque.*

- *La vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de sa source*.

Réunis, ces deux postulats conduisent à une révolution : tous les mouvements relatifs sont décrits par les transformations de Lorentz. L'espace et le temps n'ont rien d'absolu, la vitesse de la lumière dans le vide, c=299'792'456 m/s, est la plus grande vitesse atteignable.

Comme les vitesses v des mouvements qui nous sont familiers sont très faibles par rapport à c, la transformation de Galilée constitue en général une excellente approximation et notre intuition peut se référer au temps et à l'espace absolus.

Mais lorsque $v \approx c$, notre intuition devient inopérante et il convient de s'appuyer, avec discernement, sur les formules des transformations de Lorentz. En particulier si $u'=dx'/dt'$ est la vitesse d'un objet le long de l'axe Ox' du repère qui se déplace à vitesse v le long de Ox, sa vitesse $u = dx/dt$, mesurée dans Ox, est donnée par :

$$u = \frac{u'+v}{1-\frac{u'v}{c^2}}$$

On voit que si u' = c et v = c, u = c. La vitesse de la lumière est bien une vitesse limite. Par ailleurs, si $u' \ll c$ et $v \ll c$, $u = u' + v$; la loi d'addition des vitesses de Galilée est valable dans ce cas limite.

L'application des transformations de Lorentz à certains problèmes conduit à des résultats paradoxaux. Un des plus célèbre est dû à Langevin. On l'appelle aussi paradoxe *des jumeaux* ou *des horloges*. Bien entendu, le résultat ne dépend ni de l'âge respectif, ni même du sexe des protagonistes.

Le problème

En janvier 1993, Elodie (8 ans) quitte sa soeur Anaïs (5 ans) et s'embarque sur un vaisseau spatial qui se déplace en ligne droite avec une vitesse v=24/25 de la vitesse de la lumière c. Après 7 ans, Elodie fait demi-tour avec son vaisseau spatial et revient sur la Terre à la même vitesse et retrouve sa petite soeur. Quels sont les âges d'Elodie et d'Anaïs?

(1) **Pour Elodie**, dans le système de référence en mouvement :

x' =0 (elle reste dans le vaisseau spatial)

t' = 14 ans (l'horloge du vaisseau mesure deux fois sept ans)

Elodie aura 8 + 14 = 22 ans.

Pour Anaïs, dans le système au repos :

x=0 (elle reste sur terre)

$t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; on connaît t' = 14 ans, x' =0, x=0, $\sqrt{1 - \left(24/25\right)^2} = 7/25$ d'où t = ≈ 50 ans

Anaïs aura 5+50=55 ans, la cadette est plus âgée que l'aînée 1

(2) Mais les mouvements d'Elodie et d'Anaïs sont relatifs. Pour Elodie, c'est Anaïs qui s'éloigne à vitesse v dans la direction opposée. On a dès lors, toujours avec t' = 14 ans, x' =0 et x=0 :

$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ d'où $t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times t' = \frac{7}{25} \times 14 = 3.92$ ans

Ce calcul conduit aux âges suivants :

Elodie aura 8+14=22 ans, comme dans (1).

Anaïs aura 5 + 3,92 = 8,92 ans, soit un peu moins de 9 ans.

Si (1) est correct, Anaïs aura peut-être depuis longtemps terminé ses études de physicienne et comprendra le paradoxe. Si (2) est correct, elle n'aura pas le possibilité de comprendre les formules des transformations de Lorentz.

(3) On objectera à juste titre que les transformations de Lorentz concernent des **mouvements relatifs uniformes**. En quittant la Terre, Elodie est accélérée, puis sept ans plus tard freinée et à nouveau accélérée puis freinée à son retour. Pour éviter ces critiques, on change quelque peu l'énoncé du problème: Un sosie d'Elodie, Elodie Prime, née on ne sait où et comment, passe à vitesse constante v devant Anaïs (5 ans) alors qu'elle a 8 ans. Sept ans plus tard, Elodie Prime croise un autre sosie d'Elodie, Elodie Second qui se dirige vers la Terre à vitesse v. Sept ans plus tard, Elodie Second passe en face d'Anaïs sur la Terre.

On ne sait toujours pas l'âge d'Anaïs, 55 ou 8,92 ans, mais on aura peut-être pressenti ce qui est vicieux dans le premier énoncé du problème : il y a deux personnes, Anaïs la sédentaire et Elodie la voyageuse. Mais il y a **trois systèmes de référence** en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Celui d'Anaïs sur la Terre, celui d'Elodie prime qui s'éloigne et celui d'Elodie Second qui s'approche de la Terre.

Examinons ce qui se passe au moyen d'un diagramme temps-espace (figure 1) dans le système d'Anaïs. On reporte t en année et les distances en années-lumière x/c.

Pour Anaïs, sa ligne d'univers, c'est-à-dire sa courbe t(x), est la droite OC parcourue en 50 ans. Elodie Prime se déplace sur sa ligne d'univers OR en 7 années de son horloge. Sur sa ligne d'univers RC, Elodie Second rencontrera Anaïs en C, alors qu'elle était en R, 7 années de son horloge plus tôt. Notre calcul (2) donne une durée de 1,98 année pour l'horloge d'Anaïs avant cette même rencontre, ce qui place Anaïs au point B.

On n'y voit peut-être pas plus clair ainsi, mais on a posé le vrai problème: que signifie la durée AB ?

(4) Faisons le point.

Après 25 années (point E), Anaïs peut calculer qu'Elodie Prime a parcouru 24 années-lumière et que son horloge indique 7 années. Les événements **E et R sont simultanés dans le système de référence d'Anaïs**.

Lorsqu'Elodie Prime arrive en R, son horloge indique 7 années et elle calcule que l'horloge d'Anaïs indique 1,96 année (point A). Les événements **A et R sont simultanés dans le système de référence d'Elodie Prime**.

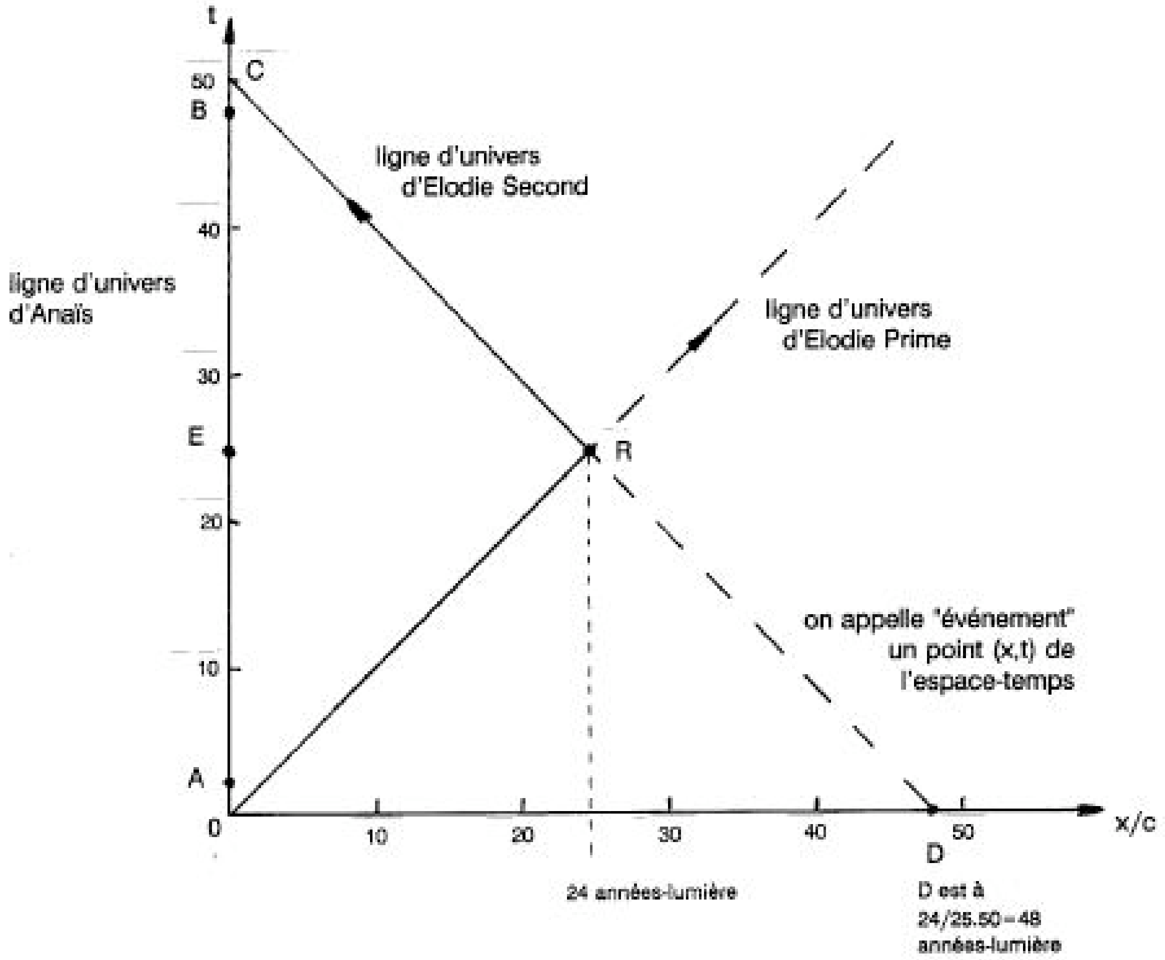

fig1. Diagramme temps-espace dans le système d'Anaïs

Lorsque l'horloge d'Anaïs indique 50 ans, elle voit passer Elodie Second à la vitesse v et elle peut calculer que 25 ans plus tôt elle se trouvait en R à 24 années-lumière et que son horloge indiquait 7 années de moins. Les événements E et R sont simultanés dans le système de référence d'Anaïs, comme il se doit. Mais en quittant R, Elodie Second calcule qu'Anaïs, elle ne doit attendre que 1,96 année avant leur rencontre en C (point B). Les événements **B et R sont simultanés dans le système de référence d'Elodie Second**.

En relativité, où le temps n'est pas universel et l'espace n'est pas absolu, la notion de simultanéité perd sa signification universelle et notre intuition a de la peine à l'admettre ! En fait, la durée AB résulte des écarts de simultanéité entre les trois systèmes de référence.

(5) Revenons au point O. Anaïs et Elodie Prime enclenchent leurs horloges (identiques). Anaïs sait qu'Elodie Second se trouve alors à 48 années-lumière (point D) et se dirige vers la Terre à la vitesse v. Pour Elodie Prime, qui quitte la Terre à la vitesse v, Elodie Second s'approche d'elle à la vitesse u, donnée par l'expression:

$$u = \frac{2v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.9991674c$$

Au moment où Elodie Prime arrive en R, son horloge marque t' = 7 ans et elle calcule que pour Elodie Second, il s'est écoulé

$$t'' = \frac{7}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 171.5714 \text{ années}$$

depuis le moment où elle se trouvait en D.

Elodie Second se dirige vers la Terre à la vitesse v et elle peut calculer (en remplaçant t' par t'' dans (2)) qu'au moment où elle croise Elodie Prime en R, l'horloge d'Anaïs, sur la Terre, marquera

$$t = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \times t'' = 48.04 \text{ années (= OB)}$$

Il s'agit bien du point B (48,04+1,96=50), puisque les événements B et R sont simultanés pour le système de référence d'Elodie Second.

(6) C'est donc bien le premier calcul (1) qui est exact. Si l'on revient au premier énoncé, on remarque que toutes les accélérations subies par Elodie se compensent : les avances et les retards dans les horloges accélérées sont aussi compensées. **Ce n'est donc pas le fait qu'Anaïs ne soit pas accélérée qui est important, mais le fait qu'elle ne change pas de système de référence**.

(7) Un autre argument confirme le résultat obtenu: Anaïs la cadette est plus âgée que son aînée Elodie qui a fait un aller et retour dans l'espace.

Considérons un pulsar, immobile par rapport à la Terre, qui émet régulièrement un signal de fréquence f_0 Imaginons que le voyage aller et retour d'Elodie se fasse sur une droite perpendiculaire à la ligne Terre-pulsar et, pour simplifier, que le pulsar soit suffisamment éloigné pour que, l'effet Doppler optique se limite à l'effet transversal.

Durant son voyage, Elodie recevra le même nombre N de signaux qu'Anaïs sur la Terre, mais à une fréquence

$$f = \frac{f_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ ; } f > f_0$$

Temps écoulé pour Elodie : $t' = \frac{N}{f} = 14$ ans

Temps écoulé pour Anaïs : $t = \frac{N}{f_0} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 50$ ans

Remarque finale

En relativité, un événement de l'espace-temps est décrit par un quadrivecteur (x,y,z,ict), dont la grandeur invariante est

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Pour l'observateur Prime, x' =y' =z' =0 dans son système propre et un intervalle de temps propre est donné par $\Delta t' = \int dt'$

où dt' n'est pas une différentielle exacte. Δt' dépend donc du chemin d'intégration dans l'espace-temps.

En mécanique classique, le temps est universel et l'intégration porte sur une variable indépendante.

Trois articles sur des sujets analogues ont paru dans l'Impartial des 13, 21 et 27 juillet 1992.